Stochastische Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Humboldt-Universität zu Berlin

von
Diplom Mathematiker
Markus Riedle
geboren am 29.04.1971 in Konstanz

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. J. Mlynek

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II:
Prof. Dr. E. Kulke

Gutachter:

1. Prof. Dr. U. Küchler
2. Prof. Dr. H.-O. Walther
3. Prof. Dr. H. von Weizsäcker

eingereicht am:	20. Dezember 2002
Tag der mündlichen Prüfung:	2. Juli 2003

Abstract

For an $\mathbb{R}^d$–valued stochastic process X denote the segment process by $X_t := \{X(t+u) : u \leqslant 0\}$ for $t \geqslant 0$. We consider the following affine stochastic differential equation with infinite delay:

$$dX(t) = L(X_t)dt + dW(t) \quad \text{for } t \geqslant 0, \qquad X_0 = \Phi, \tag{A}$$

where $L : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^d$ denotes a linear continuous functional, W denotes a Wiener process with values in $\mathbb{R}^d$ and $\mathcal{B} \subseteq \{f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^d\}$ is a semi-normed function space. The initial condition Φ is a $\mathcal{B}$–valued random variable.

The solution X of equation (A) can be represented by a variation of constants formula. We provide sufficient and necessary conditions for the existence of a stationary solution. For a special class of functionals L the equation (A) can be reduced to a system of ordinary stochastic differential equations without memory. This reduction is studied in detail. In particular, we deduce a simple equivalent condition for the existence of stationary solutions of equations with functionals L in this class.

The embedding of equation (A) into the bidualspace $\mathcal{B}^{**}$ enables us to calculate the Lyapunov exponents of the solution. For this purpose we exploit a new connection between the solution of the so-called adjoint equation of (A) and a spectral decompositon of the space $\mathcal{B}$.

By considering the continuous dependence of the solution on the functional L and the initial condition Φ we obtain results useful in applications. In conjunction with results on reducible equations we establish an approximation scheme for the solution of equation (A) by Ornstein–Uhlenbeck processes.

Moreover, we introduce a general class of Itô differential equations with non-linear drift and dispersion hereditary coefficients. We deduce a result on the existence of unique solutions for this general class of equations. Equation (A) can be regarded as a special affine equation in this class.

Keywords:
stochastic differential equations with delay, Lyapunov exponents, stationary solutions, reducible stochastic functional differential equations

Zusammenfassung

Für einen $\mathbb{R}^d$-wertigen stochastischen Prozess X auf $\mathbb{R}$ bezeichne X_t den Segmentprozess $X_t := \{X(t+u) : u \leqslant 0\}$ für $t \geqslant 0$. Es wird folgende affine stochastische Differentialgleichung mit unendlichem Gedächtnis betrachtet:

$$dX(t) = L(X_t)dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \qquad X_0 = \Phi, \tag{A}$$

wobei $L : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^d$ ein lineares stetiges Funktional, W einen Wiener-Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{B} \subseteq \{f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^d\}$ einen semi-normierten Funktionenraum bezeichnen. Die Anfangsbedingung Φ ist eine $\mathcal{B}$-wertige Zufallsvariable.
Die Lösung X der Gleichung (A) lässt sich mittels einer Formel der Variation der Konstanten darstellen. Für die Existenz einer stationären Lösung werden hinreichende und notwendige Bedingungen vorgestellt.
Für eine spezielle Klasse von Funktionalen L kann Gleichung (A) auf ein System gewöhnlicher stochastischer Gleichungen ohne Gedächtnis reduziert werden. Diese Reduktion wird im Detail untersucht, insbesondere gewinnt man ein einfaches äquivalentes Kriterium für die Existenz stationärer Lösungen von Gleichungen mit Funktionalen L dieser Klasse.
Durch Einbettung der Gleichung (A) in den Bidualraum $\mathcal{B}^{**}$ gelingt die Bestimmung der Lyapunov-Exponenten der Lösung. Hierzu wird ein neuer Zusammenhang der Lösung der sogenannten adjungierten Gleichung von (A) und einer Spektralzerlegung des Raumes $\mathcal{B}$ benutzt.
Die Untersuchung der stetigen Abhängigkeit der Lösung von dem Funktional L und der Anfangsbedingung Φ ermöglicht die Behandlung anwendungsorientierter Aspekte. In Verbindung mit den Ergebnissen über reduzierbare Gleichungen wird ein Verfahren zur Approximation der Lösung von Gleichung (A) durch Ornstein–Uhlenbeck–Prozesse vorgestellt.
Eine allgemeine Klasse von Itô-Differentialgleichungen mit nichtlinearen vergangenheitsabhängigen Drift– und Dispersionskoeffizienten wird eingeführt, in der die Gleichung (A) als eine spezielle affine Gleichung verstanden werden kann. Für diese allgemeinen Gleichungen wird ein Existenz– und Eindeutigkeitssatz nachgewiesen.

Schlagwörter:
stochastische Differentialgleichungen mit Gedächtnis, Lyapunov-Exponenten, stationäre Lösungen, reduzierbare stochastische funktionale Differentialgleichungen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1 Vorwort

Vito Volterra (1860-1940) entwickelte, nachdem die Problematik der mathematischen Beschreibung einer während des 1.Weltkrieges beobachteten Populationsänderung von Beutefischen an ihn herangetragen wurde, das so genannte Räuber-Beute-Modell. Dieses Differentialgleichungssystem beschreibt die Änderungsrate der Populationsgrößen zweier Spezies, die sich gegenseitig beeinflussen. Jedoch ist die Dynamik nicht nur von den aktuellen Populationsgrößen abhängig, sondern die gesamte Vergangenheit der Populationen gehen in diese ein. Dieses Beispiel einer *funktionalen Differentialgleichung mit unbeschränkter Vergangenheit* wird bis heute in der Populationsbiologie, Mikroökonomie, Nuklearphysik und vielen anderen Bereichen zur Beschreibung interagierender Prozesse verwendet.
Auch von K. Itô und M. Nisio wurden in der Arbeit [IN64] funktionale stochastische Differentialgleichungen untersucht, die analog stochastische Prozesse beschreiben, deren Änderungsverhalten von ihrer gesamten Vergangenheit abhängen.
War diese Arbeit [IN64] noch rein mathematisch motiviert, gewannen in den vergangenen Jahren funktionale stochastische Differentialgleichungen in den verschiedensten Anwendungen an Bedeutung: siehe etwa die Beispiele in [Mao97] oder [KM99]. Obwohl sich die wenigsten Phänomene in der Natur oder Ökonomie linear verhalten, sind lineare Modelle in der Mathematik von nicht zu bestreitendem Nutzen. Denn zum einen bieten sie die Grundlage für das Verständnis komplexerer Systeme, zum anderen können – und müssen oftmals – nicht-lineare Gleichungen mittels linearer Gleichungen analysiert werden.
Affine stochastische Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis der Länge $\alpha > 0$ sind lineare Gleichungen, die durch eine zufällige additive Komponente gestört sind. Diese Gleichungen beschreiben einen stochastischen Prozess X, dessen Dynamik zur Zeit t durch seine vergangenen Werte in dem Intervall $[t - \alpha, t]$ bestimmt wird. Diese Gleichungen sind in den letzten Jahren intensiv studiert worden und viele ihrer Eigenschaften und spezifischen Untersuchungsmethoden sind gefunden und entwickelt worden, siehe zum Beispiel [MSW86], [KM92] und [GK00]. Jedoch beschränkt die feste

Gedächtnislänge α die Möglichkeiten dieses Modells. In vielen Anwendungen kann nicht von einem bestimmten Wert α ausgegangen werden, über den hinaus die Vergangenheit des Prozesses keinen Einfluss mehr auf das Änderungsverhalten hat; siehe Beispiele der Abschnitte 1.3.1, 1.3.2 und das Volterra'sche Räuber-Beute-Modell in [Bur83]. Jede Festlegung des Wertes α würde eine Modellunsicherheit in sich bergen. Darüber hinaus gibt es zahlreiche Anwendungen, in denen aus den Zusammenhängen heraus von einer Einflussnahme der gesamten Vergangenheit des Prozesses ausgegangen werden muss. Dies ist der Fall in den physikalischen Beispielen der Abschnitte 1.3.3 und 1.3.4. Als Konsequenz verzichten wir auf eine feste Gedächtnislänge und betrachten allgemeiner affine stochastische Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\int_{(-\infty,0]} X(t+u)\,\nu(du) \right) dt + dW(t) \quad \text{für} \quad t \geqslant 0, \\ X(u) &= \Phi(u) \quad \text{für } u \leqslant 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei das Maß ν mit im Allgemeinen nicht beschränktem Träger den Einfluss der gesamten Vergangenheit des Prozesses auf seine gegenwärtige Änderung gewichtet. Die Gleichung ist (hier) gestört durch einen reellen Wiener-Prozess und die Anfangsbedingung ist durch einen stochastischen Prozess Φ auf $(-\infty, 0]$ beschrieben.

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist ein Vergleich der Eigenschaften von affinen stochastischen Gleichungen mit endlichem und unendlichem Gedächtnis. Bei Gleichungen mit endlichem Gedächtnis der Länge α besitzt das Maß ν in der Gleichung (1.1) einen kompakten Träger in $[-\alpha, 0]$. Als ein wesentlicher – und offensichtlicher – Unterschied zwischen Gleichungen mit endlichem und unendlichem Gedächtnis stellt sich der direkte Einfluss der Anfangsbedingung heraus. Denn im Fall eines endlichen Gedächtnisses der Länge α wird das Änderungsverhalten einer Lösung X für $t > \alpha$ nur noch durch die Werte der Lösung selbst im Intervall $[t-\alpha, t]$ bestimmt; es besteht kein direkter Zusammenhang mehr zu der Anfangsbedingung. Im Gegensatz dazu ist das Änderungsverhalten einer Lösung der Gleichung (1.1) zu jeder Zeit $t \geqslant 0$ unmittelbar von der Anfangsfunktion abhängig, falls das Maß ν einen nicht-kompakten Träger besitzt. Durch diese Abhängigkeit kommt dem Raum der Anfangsbedingungen, dem so genannten *Phasenraum*, für Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis eine größere Bedeutung zu als bei Gleichungen mit endlichem Gedächtnis.

Eine Konsequenz des direkten Einflusses der Anfangsfunktionen ist, dass sich kein Funktionenraum als eine naheliegende Wahl eines Phasenraumes für Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis anbietet. Aber auf zahlreichen Funktionenräumen kann die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nachgewiesen werden. In der Theorie deterministischer Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis setzte sich deshalb ein abstrakter Zugang durch, in dem gemeinsame Eigenschaften von geeigneten Funktionenräumen zu Axiomen zusammengefasst werden. Nur von diesen Axiomen ausgehend erfolgt eine Behandlung der Gleichungen. In Anwendungen muss nur noch das Gewährleisten der Axiome durch den Raum der betrachteten Anfangsfunktionen verifiziert werden.

Der Zugang des abstrakt beschriebenen Phasenraumes stellte sich in der Theorie deterministischer Gleichung als vorteilhaft heraus und es liegt nahe, das vereinheitlichende Konzept der Axiomatik auch für stochastische Gleichungen zu nutzen. So ist ein Anliegen dieser Arbeit, den abstrakten Zugang auf stochastische Differentialgleichungen auszudehnen. Diesem versuchen wir nachzukommen, indem wir den Rahmen der im Mittelpunkt dieser Arbeit stehenden affinen Gleichungen bei grundlegenden Eigenschaften – wie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, parameterabhängige Gleichungen – auf allgemeine nicht-lineare stochastische Gleichungen erweitern und diese auf den axiomatisch beschriebenen Phasenräumen behandeln, wie es durchgängig in dieser Arbeit für affine Gleichungen geschieht.

Der Unterschied zwischen endlichem und unendlichem Gedächtnis ist nicht nur auf die Wahl des Phasenraumes beschränkt, sondern affine Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis weisen teilweise qualitativ auch andere Eigenschaften auf. Aufgrund der erzielten Resultate lässt sich Folgendes resümieren: für eine bestimmte Klasse von Maßen – bezüglich denen eine nicht-beschränkte Exponentialfunktion auf der negativen Achse integrierbar ist – können für Gleichungen (1.1) mit unendlichem Gedächtnis ähnliche Resultate wie für Gleichungen mit endlichem Gedächtnis erzielt werden. Aber wegen des nur axiomatisch beschriebenen Funktionenraumes und der nicht-endlichen Integrationsgrenze erfordert dies in vielen Fällen eine andere Herangehensweise. Für Maße außerhalb dieser Klasse gelten manche Resultate – zum Teil unter stärkeren Voraussetzungen oder als schwächere Aussagen – oder aber es treten neue Phänomene auf.

Für eine bestimmte Klasse von Maßen, den so genannten Gammadichten oder Quasi-Polynomen, sind jedoch affine Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis leichter zugänglich und viele Eigenschaften der Lösungen lassen sich explizit charakterisieren. Für diese Maße kann die Differentialgleichung (1.1) auf ein gewöhnliches stochastisches Differentialgleichungssystem ohne Gedächtnis reduziert werden. Dadurch lässt sich, die Theorie des abstrakt beschriebenen Phasenraumes nutzend, ein enger Zusammenhang zwischen der Lösung einer Gleichung mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit und einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess herstellen. Darüber hinaus erlaubt die Reduzierbarkeit, das so genannte inverse Problem in dieser Arbeit zu lösen.

Andererseits zeigen Ergebnisse dieser Arbeit, dass die Lösungen von Gleichungen mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit eine "Universalrolle" besitzen. Fast jede Lösung einer affinen Gleichung mit Gedächtnis – auch eines endlichen – lässt sich durch Lösungen von Gleichungen mit unendlichen Vergangenheiten, die durch Quasi-Polynome gewichtet sind, approximieren. Dadurch eröffnet sich als Ausblick dieser Arbeit die Möglichkeit, statistische Fragestellungen von Differentialgleichungen mit Gedächtnis entweder durch die analytisch leicht zugänglichen Lösungen quasi-polynomiell gewichteter Gleichungen zu behandeln oder auf die seit langem bekannten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse zurückzuführen.

2 Zusammenfassung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen affine stochastische Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis wie Gleichung (1.1). Etwas allgemeiner als in (1.1) wird keine Integraldarstellung sondern ein beliebiger linearer und stetiger Operator $L : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^d$ auf einem axiomatisch beschriebenen Phasenraum $\mathcal{B}$ vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} dX(t) &= L(X_t)\,dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ X(u) &= \Phi(u) \quad \text{für } u \leqslant 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei X_t den Segmentprozess $X_t := \{X(t+u) : u \leqslant 0\}$ und W einen d-dimensionalen Standard-Wiener-Prozess bezeichnen. Aufgrund des Darstellungssatzes von Riesz ist mit dem Operator L ein Maß ν verbunden, das aber nur auf einer im Allgemeinen sehr kleinen Teilmenge des Raumes $\mathcal{B}$ eine Integraldarstellung wie in (1.1) für L erlaubt. Die eigentliche Bedeutung des Maßes ν ist jedoch begründet durch folgende Volterra-Gleichung, deren Lösung r in direktem Zusammenhang mit der Lösung von Gleichung (2.2) steht:

$$\dot{r}(t) = \int_{[-t,0]} \nu(du)\, r(t+u) \quad \text{für } t \geqslant 0 \quad \text{und} \quad r(0) = \mathrm{I}_d \tag{2.3}$$

mit der d-dimensionalen Einheitsmatrix I_d.
Die Rolle der so genannten Fundamentallösung bei der Behandlung von affinen stochastischen Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis übernimmt die Lösung von (2.3), die *Differential-Resolvente*, bei Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis. Einige Eigenschaften der Differential-Resolvente, die in der Theorie der Volterra-Gleichungen wie zum Beispiel in [GLS90] behandelt werden, sind in Kapitel 3 zusammengefasst. Jedoch weichen zum Teil die benötigten Eigenschaften der Differential-Resolvente für die Behandlung der stochastischen Differentialgleichung mit Gedächtnis von den Fragestellungen ab, die üblicherweise bei Volterra-Gleichungen im Vordergrund stehen. Deshalb ergänzen wir die bekannten Resultate noch durch einige Eigenschaften, die auch die Besonderheiten der Differential-Resolvente gegenüber der Fundamentallösung unterstreichen.
Die Theorie der deterministischen homogenen autonomen funktionalen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis sind von fundamentaler Bedeutung für die Behandlung der Gleichung (2.2). Grundlagen und die wichtigsten Resultate dieser Theorie werden in Kapitel 2 zusammengestellt. Ergänzt wird die Präsentation durch eine Motivation des Zuganges der abstrakt beschriebenen Phasenräume.
Allgemeine, auch nicht-lineare, stochastische Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis werden in [MT84] und [IN64] untersucht, jedoch an konkreten Beispielen von Phasenräumen. Zu Beginn des Kapitels 4 schlagen wir eine Behandlung von allgemeinen stochastischen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis im Rahmen des axiomatisch beschriebenen Phasenraumes vor. Anhand von grundlegenden Resultaten, wie Existenz und Eindeutigkeit sowie Momentenabschätzung der Lösung einer

allgemeinen stochastischen Differentialgleichung mit Gedächtnis, wird demonstriert, welche Bedeutung den abstrakt beschriebenen Eigenschaften des Phasenraumes bei der Behandlung von stochastischen Differentialgleichungen zukommt und wie sich diese mit Ergebnissen der stochastischen Analysis zu einem Nachweis der Resultate verbinden lassen.

Affine stochastische Differentialgleichungen (2.2) werden in dieser Arbeit meistens pfadweise betrachtet, was in einer Behandlung von deterministischen Differentialgleichungen resultiert. Aus der stochastischen Motivation folgen aber zum einen neue Fragestellungen und zum anderen die Notwendigkeit der Behandlung einer linearen deterministischen Differentialgleichung in integrierter Form, die durch eine nicht-differenzierbare Funktion gestört ist. Dies eröffnet ein neues Feld und viele Probleme in der Theorie von Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis, die bisher nicht untersucht wurden. So sind die Resultate in den Kapiteln 4 bis 7 nach unserem Wissen bisher nicht formuliert worden, bekannte Ergebnisse werden stets als solche angegeben.

Im zweiten Teil des Kapitels 4 wenden wir uns der Lösung der affinen Gleichung (2.2) zu und können eine Formel der Variation der Konstanten nachweisen, wie sie in [MSW86] für Gleichungen mit endlichem Gedächtnis formuliert ist. Die sich anschließende Fragestellung nach der Existenz von stationären Lösungen der Gleichungen ist für den Fall eines endlichen Gedächtnisses in [GK00] behandelt. Diese Ergebnisse können jedoch für Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis nicht direkt übernommen werden, da zunächst der Begriff der stationären Lösung in unseren Zugang eingebettet werden muss. Auch die bei endlichem Gedächtnis bekannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen der quadratischen Integrierbarkeit an die Fundamentallösung sind nicht direkt übertragbar, da anders als die Fundamentallösung die Differential-Resolvente r im stabilen Fall der Gleichung (2.3) nicht exponentiell abfallen muss. Durch ein klassisches, tiefliegendes Resultat der Volterra-Theorie ([SW75]) kann unter der Voraussetzung $r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$ die Existenz und die Darstellung einer stationären Lösung von (2.2) nachgewiesen werden, falls für das mit dem Operator L verbundene Maß ν für $\alpha > \frac{1}{2}$ die Bedingung

$$\int_{(-\infty,0]} |u|^\alpha \; |\nu|(du) < \infty$$

erfüllt ist. Für $\alpha \geqslant 1$ ist die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente r äquivalent zu ihrer quadratischen Integrierbarkeit: $r \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$. In diesem Fall gelten für die Existenz einer stationären Lösung der Gleichung (2.2) äquivalente Bedingungen, wie sie in [GK00] für Gleichungen mit endlichem Gedächtnis formuliert werden. Für nicht-endliche Maße ν zeigen wir am Ende des Kapitels 4 exemplarisch ein bisher nicht aufgetretenes Phänomen.

Zwar wird die bereits im Vorwort angesprochene Reduzierbarkeit von quasi-polynomiell gewichteten Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme in der Literatur oft benutzt, jedoch sind unseres Wissens diese Gleichungen bisher nicht systematisch in die Theorie von Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis eingebettet worden, was zu Beginn des Kapitels 5 nachgeholt wird. Methoden der Darstellungstheorie von Matrizen gestatten eine Klassifizierung

der Matrizen, durch die das korrespondierende gewöhnliche Differentialgleichungssystem beschrieben wird. Das ermöglicht schließlich die Lösung des inversen Problems.
Die in Kapitel 4 erzielten Resultate zur Stationarität nutzend, kann ein enger Zusammenhang zwischen einer stationären Lösung von (2.2) bei quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit und der Stationarität eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses nachgewiesen werden. Diesen Zusammenhang können wir durch bekannte Resultate für stochastische Differentialgleichungen in Verbindung mit der oben genannten Klassifizierung der korrespondierenden Matrizen zu einer sehr starken Äquivalenzaussage verschärfen.
In [MS90] werden pfadweise Lyapunov-Exponenten der Lösung einer affinen Gleichung mit endlichem Gedächtnis bestimmt. Um ähnliche Resultate für Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis zu erhalten, fordert die allgemeine Behandlung auf den axiomatisch beschriebenen Phasenräumen ihren Tribut, da dies eine andere Herangehensweise erfordert. Hierfür wird in Kapitel 6 eine neue Technik vorgestellt, die zunächst eine Verallgemeinerung des schwach*-Integrals erfordert, so dass sich dieses analog zu einem Riemann-Stieltjes-Integral verhält, wie das herkömmliche schwach*-Integral zu dem Lebesgue-Integral. Dadurch kann eine Formel der Variation der Konstanten für die Lösung von (2.2) auf dem Bidualraum des Phasenraumes $\mathcal{B}$ angegeben werden. Mit Methoden der Halbgruppentheorie wird in einem allgemeinen Kontext ein Resultat über die Lyapunov-Exponenten für die Lösung der deterministischen Gleichung gewonnen, die zu der stochastischen Gleichung (2.2) korrespondiert. In Abhängigkeit von der Anfangsbedingung wird entweder der Grenzwert oder eine obere Abschätzung des obersten Häufungspunktes des Lyapunov-Exponenten bestimmt. Selbst für deterministische lineare Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis und differenzierbarer Störfunktion ist unseres Wissens dieses Ergebnis bisher nicht formuliert worden.
Das allgemeine Ergebnis über die Lyapunov-Exponenten wird auf die stochastische Gleichung (2.2) in einer typischen Situation angewandt, in der für die totale Variation $|\nu|$ des mit dem Operator L verbundenen Maßes ν gilt:

$$\int_{(-\infty,0]} e^{-\varepsilon u}\ |\nu|(du) < \infty \quad \text{für ein } \varepsilon > 0.$$

Für die stochastische Gleichung (2.2) entfällt auf einer Menge der Wahrscheinlichkeit eins die bei deterministischen Gleichungen notwendige Unterscheidung der Anfangsbedingungen und der Lyapunov-Exponent existiert stets als pfadweiser Grenzwert.
Die Konvergenz der Lösungen von parameterabhängigen Gleichungen der Form (2.2) wird in Kapitel 7 betrachtet. Ein spezielles Augenmerk richtet sich auf zwei Anwendungen: zum einen die Approximation der Lösung einer beliebigen Gleichung der Form (2.2) durch die analytisch einfach handzuhabenden Lösungen von Gleichungen mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit. Des Weiteren wird das Vernachlässigen des unendlichen Gedächtnisses durch Übergang zu einer Gleichung mit endlichem Gedächtnis betrachtet, was für viele numerische Methoden von Bedeutung ist.
Zunächst wird auf funktionalanalytischem Weg in Verbindung mit Ergebnissen der stochastischen Analysis ein allgemeines Resultat über die Konvergenz der Lösungen von parameterabhängigen Gleichungen der Form (2.2) erzielt. Aus diesem Resultat kann

ein Korollar gefolgert werden, das die Behandlung der oben gestellten Anwendungen – Approximation und Vernachlässigung des unendlichen Gedächtnisses – oft ermöglicht. Die auftretenden Bedingungen werden exemplarisch als notwendig nachgewiesen.
In Anwendungen treten häufig Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis auf, in denen der Operator L eine Integraldarstellung besitzt. Für diesen Fall wird ein weiteres Konvergenzresultat formuliert, das in einigen Fällen die Beantwortung der oben gestellten Fragen nach Approximation und Vernachlässigung des unendlichen Gedächtnisses unter milderen Voraussetzungen erlaubt als das allgemein erzielte Resultat.

3 Beispiele

In den folgenden Beispielen geben wir einige Anwendungen von Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis an. In den Originalarbeiten der ersten drei Beispielen wird auf die Modellierung eines zusätzlichen Rauschens verzichtet, das wir hier auch nicht berücksichtigen. Aber eine Verfeinerung der Modelle kann durch die zusätzliche Störung der jeweiligen Gleichungen mit einem Rauschen erfolgen, um etwa den Einfluss von in der ersten Näherung vernachlässigten, nicht exakt beschreibbaren Komponenten der Gleichungen zu berücksichtigen.

3.1 Hämatologie

Zyklische Neutropenie beschreibt eine Erkrankung, in der die Anzahl der (neutrophilen) Granulozyten, die normalerweise konstant ist, zyklisch sehr stark vermindert ist. Granulozyten bilden den Hauptanteil der Leukozyten (weiße Blutzellen). In den Arbeiten [HHM98] und [HDRM00] wird die Hypothese untersucht, dass dieser zyklischen Verminderung Schwankungen der Einschleusung von Stammzellen im Knochenmark in den peripheren Blutkreislauf zugrunde liegen, und keine unterschiedlichen Absterberaten der Zellen. Die Dichte der Leukozyten zur Zeit t wird durch $x(t)$ beschrieben. In den Arbeiten wird von folgendem Änderungsverhalten der Dichte x ausgegangen:

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + P\left(\int_{-\infty}^{\tau} x(t+u)g(u)\,du\right) \quad \text{für } t \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Die Sterberate der weißen Blutzellen im Blutkreislauf wird durch den Parameter $\alpha > 0$ beschrieben und $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gibt die Produktionsrate von Stammzellen der weißen Blutzellen im Knochenmark an. Die Funktion g gewichtet die sich verändernde Reifezeit der Leukozyten und die Integrationsgrenze $\tau < 0$ entspricht dem negativen Wert der minimalen Reifezeit der Stammzellen. In [HHM98] wird eine sehr gute Übereinstimmung zu bekannten Daten durch folgende Dichte erzielt:

$$g(u) = \frac{a^{m+1}}{\Gamma(m+1)}(\tau - u)^m e^{-a(\tau-u)} \quad \text{für } u \leqslant \tau,$$

wobei Γ die Gammafunktion und $a, m \geqslant 0$ zu bestimmende Parameter sind. Durch Daten von 9 Hunden der Rasse Collie, die an Neutropenie leiden, wird in [HHM98] die

Hypothese über die Oszillation in der Stammzellenproduktion anhand der Gleichung (3.4) bestätigt. (Hunde der Rasse Collie sind laut Literatur die einzigen Tiere, die an zyklischer Neutropenie erkranken können.)
Im linearen Fall $P = \mathrm{Id}$ werden Gleichungen dieser Form mit der zitierten Dichte g in Kapitel 5 dieser Arbeit untersucht.

3.2 Populationsmodelle

Bei der Beschreibung des Zuwachses einer Poplulationsgröße N ist ein grundlegendes Modell die so genannte zeitverzögerte, logistische Gleichung:

$$\dot{N}(t) = N(t)\left(b - aN(t) - c\int_{-\infty}^{0} k(s)N(t+u)\,du\right) \quad \text{für } t \geqslant 0 \tag{3.5}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Das Integral beschreibt die Abhängigkeit des Zuwachses von der zurückliegenden Populationsgröße. Gründe für den Einfluss der Vergangenheit sind zahlreich vorhanden, wie Austrage- und Reifeprozesse, zurückliegende, wachstumshemmende Ereignisse, Nahrungsknappheit, Regenerationszeit von Resourcen und viele andere. Die Differentialgleichung (3.5) und Verallgemeinerungen werden zum Beispiel in [Mac78] und [Cus77] ausführlich untersucht.

3.3 Viskoelastizität

Wird an einem Gummiband über längere Zeit hinweg in sich verändernder Intensität gezogen, so hängt dessen Beanspruchung zu einer Zeit t stets nur von der aktuellen Dehnung ab, sieht man von einem "Ausleierungseffekt" ab. Werden jedoch an einem Eisenstab solche Deformationen ausgeübt, so hängt dessen Beanspruchung sicherlich nicht nur von der aktuellen Dehnung aus. Das Material "vergisst" keine Deformation, die an ihm ausgeführt wurde. Dies sind Materialien, die in der Viskoelastizität untersucht werden.
Betrachtet wird ein eindimensionaler Eisenstab der Länge L. Es sei $u(x,t)$ die Verdrängung eines Teilchens des Materials zur Zeit t, das die Referenzposition $x \in [0, L]$ inne hatte. Die Dehnung ist gegeben durch $u_x(x,t)$ zur Zeit t. Die Formel der linearen Impulsbilanz ergibt

$$u_{tt}(x,t) = \sigma_x(x,t) + f(x,t) \quad \text{für } x \in [0, L], \quad t \geqslant 0, \tag{3.6}$$

mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1(x,t) \quad \text{für } x \in [0,L],\ t \leqslant 0, \\ u_t(x,0+) &= u_2(x) \quad \text{für } x \in [0,L], \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Durch σ wird die Beanspruchung des Materials und durch f eine externe Kraft wie die Gravitation, die auf das Teilchen x zur Zeit t wirkt, beschrieben.

Für das oben erwähnte Gummiband ist σ von der Form $\sigma(x,t) = \Phi(u_x(x,t))$ mit einer Funktion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für viskoelastisches Material ist die Beanspruchung nach Boltzmann für kleine Deformationen gegeben durch

$$\sigma(x,t) = \beta u_x(x,t) + \int_{-\infty}^{t} m(t-u)(u_x(x,t) - u_x(x,u))\,du \quad \text{für } x \in [0,L], t \geqslant 0,$$

mit $\beta \in \mathbb{R}_+$. Die als positiv und monoton fallend vorausgesetzte Funktion m beschreibt die (lineare) Relaxationseigenschaft des Materials. Im Falle des Eisenstabes kann, siehe Beispiel 1.2.7 in [GLS90], für diese Formel angesetzt werden:

$$\sigma(x,t) = \int_{-\infty}^{t} m(t-u)\frac{d}{dt}u_x(x,u)\;du. \tag{3.7}$$

Integration der Formel (3.6) nach t und Einsetzen von (3.7) ergibt

$$u_t(x,t) = \int_{-\infty}^{0} m(-u)u_{xx}(x,t+u)\,du - \int_{-\infty}^{0} m(-u)u_{xx}(x,u)\,du + u_2(x) + f(t), \tag{3.8}$$

$$u(x,t) = u_1(x,t) \quad \text{für } x \in [0,L],\ t \leqslant 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Definiert man für Elemente v eines geeigneten Sobolev-Raumes mit $v(0) = v(L) = 0$ den Operator $Dv = v''$, so lässt sich Gleichung (3.7) in abstrakter Weise schreiben als:

$$U'(t) = \int_{-\infty}^{0} m(-u)DU(t+u)\,du + F(t) \quad \text{für } t \geqslant 0 \tag{3.9}$$

mit der Funktion F, die die letzten Terme in (3.8) zusammenfasst. Gleichung (3.9) stellt eine abstrakte Differentialgleichung mit unendlichem Gedächtnis dar, für deren Analyse oft eine komplexwertige Gleichung mit unendlichem Gedächtnis eine Rolle spielt, siehe Beispiel 1.2.7 in [GLS90].

3.4 Aeroautoelastizität

In diesem Bereich der Mechanik wird die Bewegung eines Elementes in einem Medium in Bezug auf dessen Interaktion mit der Umgebung untersucht, aus dem wir Beispiel 1.2.2 in [KM99] zitieren. Man betrachte etwa ein Teilchen mit Position $x(t)$ zur Zeit t, das sich zufällig in einem unbeschränkten Medium bewegt. Die Ableitung $v(t) := \dot{x}(t)$ ergibt die Geschwindigkeit $v(t)$, die aufgrund der Bewegungsgleichung folgender Differentialgleichung genügt:

$$m\,dv(t) = f(t)dt + \sigma\,dZ(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \tag{3.10}$$

wobei m die Masse des Teilchens ist und $\sigma\,dZ(t)$ die zufällige Wirkung der Umgebung auf das Teilchen beschreibt. Die Funktion f gibt die systematische Wirkung der Umgebung auf das Teilchen an, die nach Boussinesq gegeben ist durch

$$f(t) = -hv(t) - C\dot{v}(t)\int_{0}^{\infty} \dot{v}(t-s^2)\,ds.$$

Die Stokes'sche Reibungskraft ist $-hv(\cdot)$ und C ist eine Konstante, die von der Masse des Teilchens und des Mediums abhängt. Der Integralterm beschreibt die hydrodynamischen Nachwirkungen. Einsetzen der Funktion f in Gleichung (3.10) ergibt eine so genannte neutrale stochastische Differentialgleichung mit unendlicher Vergangenheit.

3.5 Weitere Anwendungen

Eine bedeutende Anwendung von stochastischen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis ist die Möglichkeit, stochastische Navier-Stokes-Gleichungen auf diese zu reduzieren. Diese Technik wird in [WL02] und [WMS01] angewandt, die eine Motivation der Untersuchung der Existenz von stationären Lösungen einer stochastischen Differentialgleichung in [Bak02] sind.
Zahlreiche ökonomische Modelle werden mittels Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis gebildet. In Oligopolymodellen, der Beschreibung von miteinander konkurrierenden Firmen, werden die zeitverzögerten Abhängigkeitsstrukturen, wie Reaktions- und Produktionszeit, durch Differentialgleichungen mit zum Teil unendlichem Gedächtnis modelliert.
In Modellen der Ökotoxikologie werden die Abhängigkeiten von vergangenen Einwirkungen auf die jeweiligen Modelle durch ein unendliches Gedächtnis gewichtet, da von keiner Maximalzeit auszugehen ist, in der zurückliegende Ereignisse keinen Einfluss auf das heutige System haben.

4 Überblick

Ein Symbolverzeichnis befindet sich auf Seite 148. Bei Symbolen, die in der Arbeit näher beschrieben sind, ist die Seitenzahl der entsprechenden Definition genannt. Im Appendix sind einige Resultate und Definitionen für semi-normierte Räume, matrixwertige Maße und essentielle Spektra zusammengestellt. Auf Sätze, Definitionen und Formelnummern innerhalb eines Kapitels wird mit der zweistelligen Zahl gemäß der Nummerierung verwiesen. Bei einem Verweis auf ein anderes Kapitel ist die Kapitelzahl an erster Stelle hinzugefügt.

5 Danksagung

Verdienterweise an erster Stelle steht hier Prof. Küchler, dem ich für eine ausgezeichnete Betreuung dieser Arbeit danken möchte. Durch zahlreiche Anregungen und fachliche Gespräche unterstützte er mich beim Erstellen dieser Arbeit. Aber auch unsere Arbeitsgruppe trug zum Gelingen dieser Arbeit bei. Namentlich möchte ich auf jeden Fall Markus Reiß für die stetigen fachlichen Diskussionen und eine mindestens genauso gewinnbringende angenehme Atmosphäre nichtfachlicher Art in unserem gemeinsamem Arbeitszimmer danken. Auf seine Idee geht etwa der Nachweis des Lemmas 4.1.2 zurück. Ihm und Evelyn Buckwar danke ich für die Mühe des Korrekturlesens, leider

bleibe ich aber trotzdem für alle restlichen Fehler selbst verantworlich. Prof. Sziegoleit und Dr. Sieh halfen mir beim Verständnis der Beispiele in der Einleitung.
Für eine Unterstützung vollkommen anderer Art – abgesehen vom Lösen linearer Gleichungssysteme beim Frühstück – danke ich Niesch.

Kapitel 2

Lineare funktionale Differentialgleichungen

Es wird der Zugang des axiomatisch beschriebenen Raumes der Anfangsfunktionen, des so genannten *Phasenraumes*, für Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis vorgestellt und durch Beispiele motiviert. Für homogene autonome lineare Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis geben wir in Satz 3.3 ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat für diese Gleichungen wieder. In Abschnitt 2.4 stellen wir die Spektraltheorie von stark stetigen Halbgruppen für die betrachteten Gleichung in Verbindung mit den abstrakt beschriebenen Phasenräumen vor. Einige Grundlagen der Stabilitätsanlyse für Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis sind am Ende dieses Kapitels zusammengestellt.

1 Die homogene Gleichung

Unter verschiedenen Aspekten, wie Stabilität, Operatorentheorie, Periodizität, sind in den vergangenen Jahren einige Monographien über funktionale Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis erschienen: unter anderem [LWZ94], [Kur99] und [HMN91]. Zu erwähnen ist der noch immer aktuelle Überblicksartikel [CL80]. Die wesentlichen Resultate zur Behandlung von linearen autonomen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis werden in diesem Kapitel zusammengestellt und verglichen mit den analogen Ergebnissen für Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis, wie sie in [HVL93] oder [DGVLW95] vorgestellt werden.

Für die euklidischen Räume $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ wird einheitlich das Symbol $\mathbb{K}$ verwendet. Die euklidischen Normen in $\mathbb{K}^k$ und $\mathbb{K}^{k\times i}$, k, $i \in \mathbb{N}$, werden mit $|\cdot|$ dargestellt. Für eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^d$, $d \in \mathbb{N}$, wird die *Vergangenheit* oder der *Segmentprozess zur Zeit* t durch die Funktion $x_t := \{x(t+u) : u \leqslant 0\}$ bezeichnet. Unter einer linearen autonomen funktionalen Differentialgleichung mit unendlichem Gedächtnis zu einem gegebenen Anfangswert verstehen wir Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(x_t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x_0 &= \varphi. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Der Raum der Anfangsfunktionen ist ein linearer Funktionenraum $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) \subseteq \{f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d\}$, der mit einer Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ versehen ist. Der Funktionenraum $\mathcal{B}$ erfüllt abstrakt beschriebene Bedingungen, die im folgenden Abschnitt eingeführt werden. Darüber hinaus wird die Anfangsbedingung φ als ein Element des Raumes $\mathcal{B}$ und der Operator $L : \mathcal{B} \to \mathbb{K}^d$ als linear und stetig bezüglich der in Appendix A eingeführten induzierten Topologie auf $\mathcal{B}$ angenommen.
Bei Beschreibung des Raumes $\mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ und des Operators $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ bezieht sich das Symbol $\mathbb{K}^d$ stets auf denselben Raum $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$. Es wird oft die Notation $\mathcal{B}$ abkürzend für $\mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ verwendet, falls aus dem Zusammenhang der Raum $\mathbb{K}^d$ offensichtlich ist oder die Angabe von $\mathbb{K}^d$ unerheblich ist. Durchgängig in dieser Arbeit ist die Dimension der betrachteten Differentialgleichungen durch $d \in \mathbb{N}$ notiert.

Definition 1.1
Eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^d$ heißt Lösung der Gleichung (1.1) *zu der Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$, falls $x_t \in \mathcal{B}$ für jedes $t \geqslant 0$ gilt und x lokal absolutstetig auf* $[0, \infty)$ *ist, sowie der Gleichung* (1.1) *für (Lebesgue) fast alle $t \geqslant 0$ und der Gleichung $x_0 = \varphi$ genügt.*
Eine Lösung x der Gleichung (1.1) *zu einer Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$ heißt* eindeutig, *falls für jede andere Lösung y der Gleichung* (1.1) *zu der Anfangsbedingung φ die Gleichheit $x(s) = y(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt.*

Endliches Gedächtnis 1.2 Eine lineare autonome Differentialgleichung mit endlichem Gedächtnis der Länge $\alpha \geqslant 0$ ist von der Form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x_{t,\alpha}) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x(u) &= \psi(u), \quad u \in [-\alpha, 0]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Es bezeichnet $x_{t,\alpha}$ die Funktion $\{x(t+u) : u \in [-\alpha, 0]\}$. Die Anfangsbedingung ψ ist Element eines semi-normierten Funktionenraumes $\mathcal{C} \subseteq \{f : [-\alpha, 0] \to \mathbb{K}^d\}$ und der Operator $F : \mathcal{C} \to \mathbb{K}^d$ ist linear und stetig. Wähle einen semi-normierten Funktionenraum

$$\widetilde{\mathcal{C}} \supseteq \{\varphi : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d : \varphi|_{[-\alpha,0]} \in \mathcal{C},\, \varphi(u) = 0 \text{ für } u < -\alpha\},$$

so dass der Operator

$$\widetilde{F} : \widetilde{\mathcal{C}} \to \mathbb{K}^d, \quad \widetilde{F}\varphi := F(\varphi|_{[-\alpha,0]})$$

stetig und linear auf $\widetilde{C}$ ist. Man erhält die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \widetilde{F}(x_t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x(u) &= \psi(u) \quad \text{für } u \in [-\alpha, 0], \quad x(u) = 0 \quad \text{für } u < -\alpha, \end{aligned} \tag{1.3}$$

die von der Form (1.1) ist. Eine Lösung dieser Differentialgleichung (1.3) erfüllt die Gleichung (1.2). Wir zeigen später, wie solch ein Raum $\widetilde{\mathcal{C}}$ zu einem Raum $\mathcal{C}$ gewählt werden kann, so dass auch die Bedingungen des folgenden Abschnittes erfüllt sind.
Auf der hier demonstrierten Weise verstehen wir Gleichungen mit endlichem Gedächtnis als Spezialfall von Gleichungen der Form (1.1).
Bezeichnet $x(\cdot, \psi)$ eine Lösung der Gleichung (1.2) mit endlichem Gedächtnis, so geht in das Änderungsverhalten der Funktion $x(\cdot, \psi)$ zur Zeit $t \geqslant 0$ nur das Segment $x_{t,\alpha} = \{x(t+u, \psi) : u \in [-\alpha, 0]\}$ ein. Deshalb ist für $t \geqslant \alpha$ die Funktion $x(t, \psi)$ eine Lösung einer Differentialgleichung der Form (1.2) zu der *stetigen* Anfangsfunktion $x_{\alpha,\alpha}$. Man gewinnt also durch nicht-stetige Anfangsfunktionen für die Gleichung (1.2) keine größere Klasse von möglichen Lösungen, weshalb für Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis oft $\mathcal{C} = C([-\alpha, 0], \mathbb{K}^d)$ gewählt wird.
Andererseits ist es für manche Anwendungen erforderlich, die Existenz einer eindeutigen Lösung der Gleichung (1.2) zu einer nicht-stetigen Anfangsbedingung zu gewährleisten. Auch das Zugrundelegen eines Funktionenraumes $\mathcal{C}$ mit einer Semi-Norm, die von der Supremumsnorm des Raumes $C([-\alpha, 0], \mathbb{K}^d)$ abweicht, kann von Vorteil sein, wie wir noch darlegen werden.
Gleichungen mit endlichem Gedächtnis werden in [HVL93] und [DGVLW95] behandelt.

Im Allgemeinen geht in das Änderungsverhalten einer Lösung $x(\cdot, \varphi)$ der Gleichung (1.1) zu einer Anfangsbedingung φ zu jeder Zeit $t \geqslant 0$ das gesamte Segment $x_t(\cdot, \varphi) = \{x(t+u, \varphi) : u \leqslant 0\}$ ein. Dieses Segment $x_t(\cdot, \varphi)$ beinhaltet für jedes $t \geqslant 0$ die Anfangsbedingung φ, denn:

$$x_t(u, \varphi) = \begin{cases} x(t+u, \varphi) & , u \in [-t, 0], \\ \varphi(t+u) & , u \leqslant -t. \end{cases}$$

Durch diese direkte Abhängigkeit von der Anfangsfunktion kommt der Wahl des Funktionenraumes $\mathcal{B}$ der Anfangsbedingungen bei Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis eine größere Bedeutung zu als bei Gleichungen mit endlichem Gedächtnis. Jedoch welche Räume $\mathcal{B}$ können gewählt werden?
Eine naheliegende Wahl – mit Blick auf die Theorie der Gleichungen mit endlichem Gedächtnis – ist der Raum der stetigen und beschränkten Funktionen $C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$. Aber es ist in [Sei82] gezeigt, dass für $\mathcal{B} = C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^2)$ ein stetiges Funktional $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^2)$ und eine Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$ existieren, so dass Gleichung (1.1) keine Lösung besitzt. Andererseits existieren Einschränkungen des Raumes $C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ und auch andere Räume von stetigen Funktionen, so dass für jedes stetige, lineare Funktional L und für jede Anfangsbedingung φ in diesen Räumen eine Lösung der Gleichung (1.1) existiert, siehe [HK78], [Had85] oder Satz 1.3.1 in [HMN91].
Eine andere Wahl des Funktionenraumes $\mathcal{B}$ bietet sich an, falls man von einem Integraloperator L ausgeht, etwa im skalaren, reellen Fall:

$$L\varphi = \int_{(-\infty,0]} \varphi(u)\, \nu(du)$$

mit einem endlichen Maß $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$. Dieser Operator ist zunächst wohldefiniert und stetig für alle $\varphi \in L^1_\nu(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$. Jedoch wäre $x(\cdot, \varphi)$ eine Lösung der Gleichung (1.1) zu diesem Integraloperator L, dann folgte für $t > 0$:

$$\dot{x}(t, \varphi) = \int_{[-t,0]} x(t+s, \varphi)\, \nu(ds) + \int_{(-\infty,-t)} \varphi(t+s)\, \nu(ds). \tag{1.4}$$

Das zweite Integral in (1.4) ist jedoch im Allgemeinen nicht für jedes $\varphi \in L^1_\nu(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ wohldefiniert. Erfüllt aber ein weiteres Maß $\mu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ geeignete Bedingungen sowie die Inklusion $L^1_\mu(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) \subseteq L^1_\nu(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$, so existiert zu jeder Anfangsbedingung $\varphi \in L^1_\mu(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ eine eindeutige Lösung der Gleichung (1.1) für den Integraloperator L, siehe [CM66] und Abschnitt 1.1.4 in [HMN91].
Aufgrund der Vielzahl an möglichen Räumen $\mathcal{B}$, aber auch an Räumen, die keine Lösung der Gleichung (1.1) erlauben, wird in der Theorie von funktionalen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis dieser Raum $\mathcal{B}$ oft axiomatisch beschrieben: man setzt bestimmte Eigenschaften des Raumes $\mathcal{B}$ voraus, ohne diesen zu spezifizieren. Nur diese abstrakt beschriebenen Eigenschaften voraussetzend, wird die Theorie entwickelt. Des Weiteren erlaubt die Axiomatik, die Differentialgleichung an das betrachtete Modell zu adaptieren: ist aus Gründen der Anwendung bekannt, dass zum Beispiel die vorkommenden Anfangsbedingung Funktionen einer "kleinen" Menge sind, so kann der betrachtete Phasenraum – und damit die Semi-Norm – auf diese Menge zugeschnitten werden und es wäre mit einem Informationsverlust verbunden, die Differentialgleichung auf einer größeren Menge zu betrachten.
Ein axiomatischer Zugang wird erstmals in [CM68] und [Hal69] vorgestellt. Eine Systematisierung und Diskussion von verschiedenen Axiomen findet in [HK78], [Nai79], [KS80], [Kat90] und anderen statt. In dieser Arbeit werden die in [HMN91] definierten Axiome zur Beschreibung des Raumes $\mathcal{B}$ benutzt, die auf der Arbeit [HK78] basieren.

2 Der Phasenraum

Damit Gleichung (1.1) wohldefiniert ist, muss – wie auch in Definition 1.1 gefordert – für jedes $t \geqslant 0$ die Vergangenheit $x_t(\cdot, \varphi)$ einer Lösung $x(\cdot, \varphi)$ zu einer Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$ der Gleichung (1.1) ein Element des Raumes $\mathcal{B}$ sein. Ohne die Menge aller Lösungen zu kennen, können diese und und andere Eigenschaften von Lösungen beschrieben werden, indem alle "Kandidaten" von Lösungen betrachtet werden. Den Begriff des "Kandidaten" einer Lösung hält die folgende Definition fest.

Definition 2.1
Eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^d$ heißt zulässig *für einen Funktionenraum $\mathcal{B} \subseteq \{f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d\}$, falls die Funktion x stetig auf $\mathbb{R}_+$ ist und $x_0 \in \mathcal{B}$ erfüllt ist.*

Bedingung A
Es sei $\mathcal{B} \subseteq \{f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d\}$ ein linearer Funktionenraum mit einer Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$.

Der Raum $\mathcal{B}$ erfüllt die Bedingung A, falls für jede für $\mathcal{B}$ zulässige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^d$ gilt:

a) *$x_t \in \mathcal{B}$ für jedes $t \geqslant 0$;*

b) *es existiert ein $H > 0$, unabhängig von x und t, so dass $|x(t)| \leqslant H \|x_t\|_{\mathcal{B}}$ für $t \geqslant 0$;*

c) *es existieren $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig und unabhängig von x,*
$N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ lokal beschränkt und unabhängig von x,

so dass gilt:

$$\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leqslant M(t) \sup_{s\in[0,t]} \{|x(s)|\} + N(t) \|x_0\|_{\mathcal{B}} \qquad \text{für jedes } t \geqslant 0;$$

d) *$t \mapsto x_t$ ist eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathcal{B}$.*

Definition 2.2
Ein linearer Funktionenraum $\mathcal{B} \subseteq \{f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d\}$ mit einer Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ heißt Phasenraum, *falls $\mathcal{B}$ die Bedingung A erfüllt.*

Ohne dies explizit zu erwähnen, wird in dieser Arbeit stets von einem Phasenraum $\mathcal{B}$ gemäß Definition 2.2 ausgegangen, um Gleichungen der Form (1.1) zu untersuchen. Die Bedingungen werden gemäß der Nummerierung A.a bis A.d referiert, ohne auf die Definition zu verweisen. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, wird ein Phasenraum komplex genannt.
Die Eigenschaft A.b garantiert, dass die Existenz einer eindeutigen Lösung der Gleichung (1.1) in der Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ des Phasenraumes bereits die punktweise Eindeutigkeit gemäß Definition 1.1 impliziert. Den Nachweis der Existenz einer Lösung der Gleichung (1.1) ermöglicht die Eigenschaft A.c des zugrunde liegenden Phasenraumes $\mathcal{B}$, siehe Satz 4.1.2 in [HMN91] oder auch Seite 311 und insbesondere Lemma 1 in [Kat90]. Eine wesentliche Eigenschaft des hier gewählten Zuganges ist die Forderung A.d an einen Phasenraum. Diese Forderung, die Lösung als eine stetige Bewegung in dem Funktionenraum vorauszusetzen, ist motiviert durch die Theorie der dynamischen Systeme.
Für einen Phasenraum $\mathcal{B}$ ist nach Bedingung A.a die Vergangenheit jeder stetigen Fortsetzung der Nullfunktion wieder ein Element des Phasenraumes. Dies sind die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in $(-\infty, 0]$:

Lemma 2.3
Für jeden Phasenraum $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ gilt:

$$\begin{aligned} &C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) \subseteq \mathcal{B}, \\ &\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leqslant \min\{M(a), M(a-b)N(b)\} \|\psi\|_{C_c}, \end{aligned}$$

für $\psi \in C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq [-a, -b]$ für $a \geqslant b \geqslant 0$.

Beweis: Siehe Proposition 1.2.1 in [HMN91]. □

Beispiel 2.4 Für eine positive, stetige Funktion $g : \mathbb{R}_- \to (0, \infty)$ definiere

$$C_g^0 := C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) := \{\varphi \in C(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) \; : \; \lim_{u \to -\infty} |\varphi(u)| \, (g(u))^{-1} = 0\},$$

und für $\varphi \in C_g^0$ sei

$$\|\varphi\|_{C_g^0} := \sup_{u \leqslant 0} \{|\varphi(u)| \, (g(u))^{-1}\}.$$

Gilt für die Funktion g, dass für $s \geqslant 0$ die Funktion

$$s \mapsto G(s) := \sup_{u \leqslant -s} \{g(u+s) g(u)^{-1}\} \tag{2.5}$$

lokal beschränkt ist, dann ist der Raum $(C_g^0, \|\cdot\|_{C_g^0})$ nach Satz 1.3.2 und Satz 1.3.6 in [HMN91] ein Phasenraum. Die Funktionen M und N der Bedingung A.c können für $t \geqslant 0$ gewählt werden als

$$M(t) := \sup_{u \in [-t, 0]} (g(u))^{-1} \quad \text{und} \quad N(t) := G(t).$$

Eine mögliche Wahl der Funktion g ist $g(u) = 1 + |u|^\gamma$ für $u \leqslant 0$ mit $\gamma \geqslant 0$. Der sich daraus ergebende Raum $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ wird im späteren Verlauf der Arbeit von Bedeutung sein.

Beispiel 2.5 Für $\gamma \in \mathbb{R}$ definiere

$$C_\gamma := C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) := \{\varphi \in C(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) \; : \; \lim_{u \to -\infty} |\varphi(u)| \, e^{-\gamma u} \text{ existiert}\},$$

und für $\varphi \in C_\gamma$ sei

$$\|\varphi\|_{C_\gamma} := \sup_{u \leqslant 0} \{|\varphi(u)| \, e^{-\gamma u}\}.$$

Nach Satz 1.3.7 in [HMN91] ist der Raum C_γ für $\gamma \in \mathbb{R}$ ein Phasenraum. Die Funktionen M und N der Bedingung A.c lassen sich wählen als:

$$M(t) = \max\{1, e^{\gamma t}\} \quad \text{und} \quad N(t) = e^{\gamma t}.$$

Die Exponentialfunktion kann durch andere Funktionen ersetzt werden, falls diese noch weitere Eigenschaften erfüllen, siehe [Had85].

Beispiel 2.6 Für eine nicht-negative, messbare Funktion $g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ und $\rho \leqslant 0$ sowie $p \geqslant 1$ definiere

$$
\begin{aligned}
C[\rho,0] \times L_g^p &:= (C[\rho,0] \times L_g^p)(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) \\
&:= \{\varphi : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d \,:\, \varphi \text{ ist stetig auf } [\rho,0] \text{ und } \int_{-\infty}^{\rho} |\varphi(u)|^p \, g(u) du < \infty\}, \\
\|\varphi\|_{C\times L_g^p} &:= \sup_{u\in[\rho,0]} |\varphi(u)| + \left(\int_{-\infty}^{\rho} |\varphi(u)|^p \, g(u) \, du \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Erfüllt die Funktion g die Forderungen

> g ist lokal integrierbar auf $(-\infty,\rho)$;
>
> es existiert eine lokal beschränkte Funktion $G : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, so dass gilt:
>
> $g(u+s) \leqslant G(u)g(s)$ für $u \leqslant 0$ und $s \in (-\infty,\rho) \setminus N_u$
>
> mit einer Lebesgue-Nullmenge N_u,

dann ist der Raum $C[\rho,0] \times L_g^p$ nach Satz 1.3.8 in [HMN91] ein Phasenraum. Die Funktionen M und N der Bedingung A.c lassen sich angeben zu

$$
M(t) := \begin{cases} 1 & , t \in [0,-\rho], \\ 1 + \left(\int_{-t}^{\rho} g(u) du \right)^{1/p} & , t > -\rho, \end{cases}
$$

$$
N(t) := \begin{cases} \max\left\{ 1 + \left(\int_{\rho-t}^{\rho} g(u) du \right)^{1/p}, \, (G(-t))^{1/p} \right\} & , t \in [0,-\rho], \\ \max\left\{ \left(\int_{\rho-t}^{-t} g(u) du \right)^{1/p}, \, (G(-t))^{1/p} \right\} & , t > -\rho. \end{cases}
$$

Für $\rho = 0$ wird die Forderung der Stetigkeit der Funktionen hinfällig. In diesem Fall benutzen wir die Notation:

$$
\mathbb{K}^d \times L_g^p := \{\varphi : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d ; \int_{-\infty}^{0} |\varphi(u)|^p \, g(u) du < \infty\} \tag{2.6}
$$

mit der Norm $\|\varphi\|_{\mathbb{K}^d\times L_g^p} := |\varphi(0)| + \left(\int_{-\infty}^{0} |\varphi(u)|^p \, g(u) \, du \right)^{1/p}$.

Beispiel 2.7 Der Raum $C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ der beschränkten und stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm ist kein Phasenraum, da die Bedingung A.d die gleichmäßige Stetigkeit der Funktionen in diesem Raum implizieren würde. Erinnert sei an die zu Beginn dieses Kapitels zitierte Arbeit von [Sei82], wonach in $C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^2)$ eine Differentialgleichung der Form (1.1) existiert, zu der keine Lösung gefunden werden kann.

Werden in dieser Arbeit die in den Beispielen 2.4 bis 2.6 eingeführten Räume zitiert, ist stets vorausgesetzt, dass die erwähnten Bedingungen gewährleistet sind, so dass diese Phasenräume sind.

Die Bedingung A charakterisiert einen Phasenraum $\mathcal{B}$ durch Forderungen an die zulässigen Funktionen für den Raum $\mathcal{B}$. Diese Eigenschaften eines Phasenraumes sind nach Satz 3.3 des folgenden Abschnittes hinreichend, um die Existenz einer eindeutigen Lösung der Gleichung (1.1) zu gewährleisten. Bei Anwendung der Halbgruppentheorie im späteren Verlauf dieser Arbeit werden noch zwei weitere Eigenschaften der Phasenräume gefordert, denen die meisten betrachteten Räumen genügen.
Für ein Element φ eines beliebigen Phasenraumes $\mathcal{B}$ bezeichne $\hat{\varphi}$ die Äquivalenzklasse $\{\psi \in \mathcal{B} : \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0\}$ und $\hat{\mathcal{B}}$ den Quotientenraum $\{\hat{\varphi} : \varphi \in \mathcal{B}\}$. Der Raum $\hat{\mathcal{B}}$ ist nach Satz A.4 ein linearer, normierter Raum mit der Norm $\|\hat{\varphi}\|_{\hat{\mathcal{B}}} := \|\varphi\|_{\mathcal{B}}$.

Bedingung B
Der Funktionenraum $\mathcal{B} \subseteq \{f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d\}$ erfüllt die Bedingung B, falls der Quotientenraum $\hat{\mathcal{B}}$ vollständig ist.

Erfüllt ein Phasenraum $\mathcal{B}$ die Bedingung B, wird in dieser Arbeit oft von einem *vollständigen* Phasenraum gesprochen.
Die Forderung der Vollständigkeit ermöglicht die Behandlung von funktionalen Differentialgleichungen auf dem Banachraum $\hat{\mathcal{B}}$. Weniger offensichtlich ist die folgende Definition, von der wir eine Anwendung in Bemerkung 4.9 demonstrieren.

Bedingung C
Der Phasenraum $\mathcal{B} \subseteq \{f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d\}$ erfüllt die Bedingung C, falls für jede Cauchy-Folge $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ bezüglich der Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ die folgende Implikation gilt:

$$\exists\, \varphi : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d : \varphi_n \to \varphi \textit{ gleichmäßig auf jedem Kompaktum in } \mathbb{R}_- \textit{ für } n \to \infty$$
$$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{B} \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

Beispiel 2.8 Die in den Beispielen 2.4 bis 2.6 eingeführten Beispiele der Phasenräume C_g^0, C_γ und $C[\rho,0] \times L_g^p$ erfüllen die Bedingungen B und C ohne zusätzliche Voraussetzungen zu den bereits angenommenen; siehe Sätze 1.3.2, 1.3.7 und 1.3.8 in [HMN91].

Im Zusammenhang mit Stabilitätseigenschaften von Lösungen der Gleichungen (1.1) werden Phasenräume betrachtet, die einer weiteren Bedingung genügen:

Bedingung D
Der Phasenraum $\mathcal{B} \subseteq \{f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d\}$ erfüllt die Bedingung D, falls für jede gleichmäßig beschränkte Folge $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ bezüglich der Supremumsnorm die folgende Implikation gilt:

$$\exists\, \varphi : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}^d : \varphi_n \to \varphi \textit{ gleichmäßig auf jedem Kompaktum in } \mathbb{R}_- \textit{ für } n \to \infty$$
$$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{B} \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

Beispiel 2.9 Der Phasenraum C_g^0 erfüllt nach Satz 1.3.2 in [HMN91] die Bedingung D, falls für die Funktion g gilt:

$$\lim_{u \to -\infty} g(u) = \infty.$$

Beispiel 2.10 Der Phasenraum C_γ erfüllt nach Satz 1.3.7 in [HMN91] die Bedingung D, falls $\gamma < 0$ gilt.

Beispiel 2.11 Der Phasenraum $C[\rho, 0] \times L_g^p$ erfüllt nach Satz 1.3.8 in [HMN91] die Bedingung D, falls für die Funktion g gilt:

$$\int_{-\infty}^{\rho} g(u)du < \infty.$$

3 Existenz und Eindeutigkeit

Im Unterschied zu linearen Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis der Länge $\alpha \geqslant 0$ und Anfangsfunktionen aus dem Raum $C([-\alpha, 0], \mathbb{K}^d)$ ist das auf einem Phasenraum $\mathcal{B}$ definierte Funktional $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$, das die Differentialgleichung (1.1) beschreibt, im Allgemeinen nicht als ein Integraloperator für alle Funktionen aus $\mathcal{B}$ darstellbar. Der Satz von Riesz garantiert aber eine Integraldarstellung auf dem Raum $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$, der nach Lemma 2.3 in jedem Phasenraum $\mathcal{B}$ enthalten ist.

Satz 3.1
Für einen Phasenraum $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ sei $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$. Dann existiert ein eindeutiges Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$, so dass gilt:

$$L\psi = \int_{(-\infty,0]} \nu(du)\,\psi(u) \quad \text{für alle } \psi \in C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d); \tag{3.7}$$

$$|\nu|([-t, -s]) \leqslant C\,\|L\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}}\, M(t-s)N(s) \quad \text{für alle } t > s \geqslant 0, \tag{3.8}$$

mit einer Konstanten $C > 0$.

Beweis: Siehe Satz 3.4.2 in [HMN91]. □

Endliches Gedächtnis 3.2 Für einen Phasenraum $\mathcal{B}$ beschreibe $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ eine Differentialgleichung mit endlichem Gedächtnis der Länge $\alpha \geqslant 0$. Nach Satz 3.1 kann L gemäß (3.7) mit einem Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ dargestellt werden. Da der Operator L nur von der Teilvergangenheit $\{\varphi(u) : u \in [-\alpha, 0]\}$ abhängt, kann L auf $C([-\alpha, 0], \mathbb{K}^d)$ gemäß (3.7) repräsentiert werden und die Differentialgleichung besitzt die Form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_{[-\alpha,0]} \nu(du)\, x(t+u) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x(u) &= \varphi(u) \quad \text{für } u \in [-\alpha, 0], \end{aligned} \tag{3.9}$$

für $\varphi \in C([-\alpha,0],\mathbb{K}^d)$. Diese Gleichung (3.9) kann als eine Gleichung der Form (1.1) mit dem in Beispiel 2.6 eingeführten Phasenraum $(C[-\alpha,0]\times L^1_g)(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^d)$ für $g=0$ betrachtet werden; vergleiche Beispiel 1.2.
Für geeignete Maße $\nu \in M([-\alpha,0],\mathbb{K}^d)$ kann andererseits eine Differentialgleichung der Form (3.9) auf dem Phasenraum $\mathbb{K}^d \times L^1_g$ mit einer entsprechenden Funktion g betrachtet werden. Dadurch wird der Raum der Anfangsfunktionen erheblich vergrößert. Des Weiteren können Vorteile durch Betrachten der Gleichung (3.9) auf Phasenräumen von stetigen Funktionen erzielt werden. Zwar gewinnt man zum Beispiel durch den Phasenraum $C_\gamma(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^d)$ keine größere Klasse von Anfangsfunktionen für (3.9), jedoch kann die Norm eine stärkere Aussage über die Lösung x liefern: $\|x_t\|_{C_\gamma} \to 0$ für $t\to\infty$ gibt für $\gamma>0$ im Gegensatz zu $\|x_t\|_{C[-\alpha,0]} \to 0$ eine Konvergenzrate an!

Zu einem Funktional $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathbb{K}^d)$ bezeichne $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^{d\times d})$ das Maß gemäß Satz 3.1. Betrachte die folgende Volterra'sche Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot r(t) &= \int_{[-t,0]} \nu(ds)\, r(t+s) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ r(0) &= \mathrm{I}_d, \end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei I_d die d-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Nach Satz 3.1.1 des folgenden Kapitels existiert eine eindeutige, lokal absolutstetige Funktion $r \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{K}^{d\times d})$, die (Lebesgue) fast überall der Differentialgleichung (3.10) genügt. Die Funktion r wird *Differential-Resolvente* des Maßes ν bezeichnet und wird in Kapitel 3 eingehender behandelt.
Zur Darstellung der Lösung der Gleichung (1.1) werden noch folgende Operatoren für $t \geqslant 0$ benötigt:

$$S(t): \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \quad (S(t)\varphi)(u) := \begin{cases} \varphi(0) & ,\ u \in [-t,0], \\ \varphi(t+u) & ,\ u \leqslant -t, \end{cases} \tag{3.11}$$

wobei $\mathcal{B}$ ein Phasenraum ist. Wegen der Bedingung A ist $S(t)\varphi$ für jedes $t \geqslant 0$ und $\varphi \in \mathcal{B}$ ein Element des Phasenraumes $\mathcal{B}$ und es gilt $S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{B})$ für $t \geqslant 0$. Des Weiteren gilt

$$S(0) = \mathrm{Id} \quad \text{und} \quad S(t+s) = S(t)S(s) \quad \text{für } s,t \geqslant 0 \tag{3.12}$$

und wegen der Bedingung A.d ist für $\varphi \in \mathcal{B}$

$$t \mapsto S(t)\varphi \quad \text{stetig für } t \geqslant 0. \tag{3.13}$$

Da $S(t)\varphi$ gerade die Vergangenheit zur Zeit t der Lösung von Gleichung (1.1) für $L=0$ zu der Anfangsbedingung φ angibt, werden die Operatoren $S(t)$ Lösungsoperatoren der trivialen Gleichung genannt.

Satz 3.3
Es seien $\mathcal{B}$ ein Phasenraum und L ein Operator in $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$, der durch das Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ gemäß (3.7) dargestellt werde. Die Differential-Resolvente des Maßes ν wird durch r bezeichnet. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$ eine eindeutige Lösung $x(\cdot, \varphi)$ der Gleichung (1.1). Diese besitzt für $t \geqslant 0$ die Darstellung:

$$x(t, \varphi) = \varphi(0) + \int_0^t r(t-s)L(S(s)\varphi)ds. \tag{3.14}$$

Beweis: Siehe Satz 4.1.8 in [HMN91]. □

Auf dem Phasenraum $\mathcal{B}$ definiere für $t \geqslant 0$ die Operatoren

$$T(t) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \quad T(t)\varphi := x_t(\cdot, \varphi),$$

wobei $x(\cdot, \varphi)$ die Lösung der Gleichung (1.1) zu der Anfangsbedingung φ bezeichnet. Die Operatoren $T(t)$ werden Lösungsoperatoren der Gleichung (1.1) genannt. Satz 3.3 impliziert:

$$T(0) = \mathrm{Id} \quad \text{und} \quad T(t+s) = T(t)T(s) \quad \text{für } s, t \geqslant 0. \tag{3.15}$$

Aus der Bedingung A.d folgt für $\varphi \in \mathcal{B}$:

$$t \mapsto T(t)\varphi \quad \text{ist stetig für } t \geqslant 0. \tag{3.16}$$

Wegen der Gleichungen (3.15) und (3.16) wird $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ Lösungshalbgruppe der Differentialgleichung (1.1) genannt.

4 Spektralzerlegung

In diesem Abschnitt werden Resultate vorgestellt, die mittels der Halbgruppentheorie erzielt werden. Dazu wird stets angenommen, dass der Phasenraum $\mathcal{B}$ der Bedingung B genügt, so dass der Quotientenraum $\hat{\mathcal{B}}$ ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_{\hat{\mathcal{B}}}$ ist.
Zu einem Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^d)$ bezeichne $T(t)$ für $t \geqslant 0$ die Lösungsoperatoren der Gleichung (1.1) und $\hat{\mathrm{T}}(t)$ die durch $T(t)$ für $t \geqslant 0$ gemäß Satz A.5 induzierten Operatoren auf $\hat{\mathcal{B}}$. Wegen der Eigenschaften (3.15) und (3.16) ist $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ eine stark stetige Halbgruppe von beschränkten Operatoren auf dem Banachraum $\hat{\mathcal{B}}$. Der infinitesimale Erzeuger von $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ wird durch $\hat{\mathrm{A}}$ bezeichnet. Jedoch ist die Halbgruppe $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ im Allgemeinen nicht schließlich kompakt, wie das folgende Beispiel belegt.

Beispiel 4.1 Wir zeigen, dass die Lösungsoperatoren $\{\hat{S}(t)\}_{t\geqslant 0}$ der trivialen Gleichung nicht schließlich kompakt sind. Betrachte auf dem Phasenraum $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ mit $g(u) = 1$ für $u \leqslant 0$ die Funktionenfolge

$$\varphi^n(u) := \begin{cases} 1 & , \ u \in [-n, 0]; \\ u + 1 + n & , \ u \in [-n-1, -n]; \\ 0 & , \ u \leqslant -n-1. \end{cases}$$

Die Folge $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, jedoch enthält die Folge $\{S(t)\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für kein $t \geqslant 0$ eine konvergente Teilfolge.

Das Spektrum eines infinitesimalen Erzeugers B einer schließlich kompakten Halbgruppe ist diskret und die Resolvente $(\lambda \operatorname{Id} - B)^{-1}$ besitzt keine wesentliche Singularität an den Elementen λ des Spektrums, siehe Korollar 5.3.2 in [EN00]. Diese wesentliche Eigenschaft zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens einer stark stetigen Halbgruppe kann in dem Fall der Lösungshalbgruppe $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ der Gleichung (1.1) nach Beispiel 4.1 nicht vorausgesetzt werden. Um trotzdem Resultate analog zu dem Fall einer schließlich kompakten Halbgruppe zu erzielen, trennt man das Spektrum des Erzeugers in "angenehme" und "unangenehme" Spektralwerte auf und hofft auf eine geeignete "räumliche" Trennung dieser Werte. Es wird sich zeigen, dass gerade durch das essentielle Spektrum in Definition C.1 und dessen Radius in (C.2) diese Trennung erzielt werden kann.
Die essentiellen Spektralradien $r_e(\hat{\mathrm{T}}(t))$ der Operatoren $\hat{\mathrm{T}}(t)$ für $t \geqslant 0$ werden sich durch den in der folgenden Definition eingeführten Parameter angeben lassen. Es bezeichne $\hat{S}(t)$ für $t \geqslant 0$ die durch die Lösungsoperatoren $S(t)$ der trivialen Gleichung gemäß Satz A.5 induzierten Operatoren. Wegen der Gleichungen (3.12) und (3.13) ist $\{\hat{S}(t)\}_{t\geqslant 0}$ eine stark stetige Halbgruppe. Die im Folgenden gebrauchten Notationen und Begriffe sind im Anhang C zusammengestellt.

Definition 4.2
Für einen vollständigen Phasenraum $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ definiere

$$\beta := \beta_{\mathcal{B}} := \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} \log \alpha(\hat{S}(t)).$$

Aufgrund der Submultiplikativität (C.6) des Kuratowski-Maßes α der Nicht-Kompaktheit eines Operators ist der Parameter β wohldefiniert und $\beta \in [-\infty, \infty)$. Die Lösungshalbgruppe $\{\hat{S}(t)\}_{t\geqslant 0}$ der trivialen Gleichung ist unabhängig vom Operator L der Differentialgleichung (1.1) und somit ist der Parameter β nur von dem Phasenraum $\mathcal{B}$ abhängig.

Beispiel 4.3 Für den Phasenraum $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ mit $g(u) = 1 + |u|^\gamma$, $u \leqslant 0$, und festem $\gamma \geqslant 0$ gilt $\beta = 0$. Dies lässt sich wie auf Seite 195 in [HMN91] nachweisen, wo der Fall $\gamma = 1$ behandelt ist.

Beispiel 4.4 Für den Phasenraum $C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt nach Beispiel 4.3.2 in [HMN91] die Gleichheit $\beta = \gamma$.

In ähnlicher Weise wie der gewöhnliche Spektralradius $r_\sigma(\hat{\mathrm{T}}(t))$ der Operatoren $\hat{\mathrm{T}}(t)$ lässt sich der Spektralradius $r_e(\hat{\mathrm{T}}(t))$ des essentiellen Spektrums für $t \geqslant 0$ angeben:

Satz 4.5
Es seien B ein komplexer Phasenraum, der den Bedingungen B und C genügt, und L ein Operator in $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^d)$. Für die Lösungshalbgruppe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ der dazugehörigen Gleichung (1.1) gilt für alle $t \geqslant 0$:

a) $r_\sigma(\hat{\mathrm{T}}(t)) = e^{\omega t}$ *mit* $\omega := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \left\| \hat{\mathrm{T}}(t) \right\|_{\hat{\mathcal{B}}\to\hat{\mathcal{B}}} < \infty$;

b) $r_e(\hat{\mathrm{T}}(t)) = e^{\beta t}$ *mit* $\beta = \beta_{\mathcal{B}}$.

Beweis: Die Aussage a) ist wohlbekannt für stark stetige Halbgruppen, siehe Proposition 4.2.2 in [EN00]. Aussage b) ist in Satz 4.3.5 in [HMN91] bewiesen. □

Der folgende Satz gibt die Schranke Re $\lambda = \beta_{\mathcal{B}}$ als "räumliche" Trennung der "angenehmen" und "unangenehmen" Spektralwerte des infinitesimalen Erzeugers $\hat{\mathrm{A}}$ an. Die "angenehmen" Spektralwerte sind wegen Korollar C.3 gerade die Eigenwerte des infinitesimalen Erzeugers $\hat{\mathrm{A}}$, die nicht im essentiellen Spektrum liegen.
Das Spektrum, Punktspektrum und essentielle Spektrum des infinitesimalen Erzeugers $\hat{\mathrm{A}}$ sind durch $\sigma(\hat{\mathrm{A}})$, $\sigma_P(\hat{\mathrm{A}})$ und $\sigma_e(\hat{\mathrm{A}})$ bezeichnet. Für $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ werden die Notationen $\mathbb{C}_b := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda > b\}$ und $\overline{\mathbb{C}}_b := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda \geqslant b\}$ für die jeweiligen Halbebenen benutzt.

Satz 4.6
Es seien $\mathcal{B}$ ein komplexer Phasenraum, der den Bedingungen B und C genügt, und L ein Operator in $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^d)$. Für den infinitesimalen Erzeuger $\hat{\mathrm{A}}$ der Lösungshalbgruppe $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ der dazugehörigen Gleichung (1.1) gilt:

$$\sigma(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}} \subseteq \sigma(\hat{\mathrm{A}}) \setminus \sigma_e(\hat{\mathrm{A}}) \subseteq \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}).$$

Beweis: Siehe Satz 5.2.7 in [HMN91] und Korollar C.3. □

Für $\lambda \in \sigma(\hat{\mathrm{A}}) \setminus \sigma_e(\hat{\mathrm{A}})$ existiert nach Korollar C.3 ein $l \in \mathbb{N}$, so dass

$$M_\lambda(\hat{\mathrm{A}}) := \bigcup_{j\geqslant 1} \text{Kern} \left[(\lambda \,\text{Id} - \hat{\mathrm{A}})^j \right] = \text{Kern} \left[(\lambda \,\text{Id} - \hat{\mathrm{A}})^l \right].$$

Der Raum $M_\lambda(\hat{\mathrm{A}})$ wird *verallgemeinerter Eigenraum* des infinitesimalen Erzeugers $\hat{\mathrm{A}}$ zum Eigenwert λ genannt. Da λ nicht im essentiellen Spektrum liegt, ist nach Definition C.1 die Dimension des verallgemeinerten Eigenraumes endlich. Die Dimension des verallgemeinerten Eigenraumes $M_\lambda(\hat{\mathrm{A}})$ wird algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ genannt. Ist die algebraische Vielfachheit durch $k \in \mathbb{N}$ gegeben, so heißt λ *ein Eigenwert zum Index* (k, l).
Es ist eine Beschreibung der Eigenwerte $\lambda \in \sigma_P(\hat{\mathrm{A}})$ in der Halbebene $\mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}}$ erwünscht. Zunächst wird folgende Definition eingeführt:

Definition 4.7
Für $\lambda \in \mathbb{C}$ definiere

$$e(\lambda) : \mathbb{C}^d \to C(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^d), \quad (e(\lambda)b)(u) := e^{\lambda u} b \quad \textit{für } u \leqslant 0.$$

Im skalaren Fall $d = 1$ benutzen wir $e(\lambda) := \exp(\lambda)1$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $e(\lambda)\,\mathrm{I}_d$ als die Multiplikation der Einheitsmatrix $\mathrm{I}_d \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mit einer skalaren Exponentialfunktion $e(\lambda)$. Falls die Funktion $e(\lambda)b$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C}^d$ ein Element des Phasenraumes $\mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^d)$ ist, so bezeichnet $\hat{e}(\lambda)b$ die induzierte Funktion $(e(\lambda)b)\hat{}$ gemäß Satz A.5 im Quotientenraum $\hat{\mathcal{B}}$.
Obwohl die Phasenräume nur axiomatisch beschrieben sind, gewährleistet der folgende Satz, dass Exponentialfunktionen Elemente des Phasenraumes sind. Der verwendete Begriff der Holomorphie einer Funktion mit Werten in einem normierten Raum findet sich zum Beispiel in Definition 3.30 in [Rud87].

Satz 4.8
Es sei $\mathcal{B}$ ein komplexer Phasenraum, der den Bedingung B und C genügt. Es gilt:

a) *$e(\lambda)b \in \mathcal{B}$ für $\lambda \in \mathbb{C}_{\beta_\mathcal{B}}$ und jedes $b \in \mathbb{C}^d$.*

b) *$\lambda \mapsto \hat{e}(\lambda)b$ ist holomorph auf $\mathbb{C}_{\beta_\mathcal{B}}$ für jedes $b \in \mathbb{C}^d$.*

Beweis: Siehe Satz 5.2.4 in [HMN91]. □

Eine Konsequenz der Bedingung C an einen Phasenraum liegt in der folgenden Eigenschaft, deren Nachweis wir von Seite 138 in [HMN91] zitieren. Es wird gezeigt, dass die Ableitung $\frac{d}{d\lambda}\hat{e}(\lambda)b$ gleich dem Repräsentanten der Ableitung der Funktion $\lambda \mapsto e(\lambda u)b$ für $u \leqslant 0$ und $b \in \mathbb{C}^d$ im Quotientenraum $\hat{\mathcal{B}}$ ist.

Bemerkung 4.9 Für einen komplexen Phasenraum $\mathcal{B}$, der den Bedingungen B und C genügt, gilt für $b \in \mathbb{C}^d$ und $\lambda \in \mathbb{C}_{\beta_\mathcal{B}}$:

$$\tfrac{d}{d\lambda}\hat{e}(\lambda)b = \big(\tfrac{d}{d\lambda}e(\lambda)b\big)\widehat{}\,.$$

Beweis: Es seien $\varphi(u) := \frac{d}{d\lambda}(e(\lambda)b)(u)$ für $u \leqslant 0$ und

$$\varphi^n(u) := n\,\big(e(\lambda + \tfrac{1}{n})(u) - e(\lambda)(u)\big)\,b, \quad u \leqslant 0,\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf jedem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}_-$ gleichmäßig gegen φ für $n \to \infty$. Andererseits besagt gerade die Holomorphie in Satz 4.8.b

$$\lim_{n\to\infty} \big\|\hat{\varphi}^n - \tfrac{d}{d\lambda}\hat{e}(\lambda)b\big\|_{\hat{\mathcal{B}}} = 0.$$

Somit ist $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in der Semi-Norm $\|\cdot\|_\mathcal{B}$ und Bedingung C impliziert

$$\lim_{n\to\infty} \big\|\hat{\varphi}^n - (\tfrac{d}{d\lambda}e(\lambda)b)\hat{}\big\|_{\hat{\mathcal{B}}} = 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes in $\hat{\mathcal{B}}$ folgt die Behauptung. □

Satz 4.8 legt nahe, die so genannte *charakteristische Matrix* der Gleichung (1.1) einzuführen.

Definition 4.10
Es seien $\mathcal{B}$ ein komplexer Phasenraum, der den Bedingungen B und C genügt, sowie $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^d)$. Die Funktion

$$\Delta_L : \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}} \to \mathbb{C}^{d\times d}, \quad \Delta_L(\lambda) := \lambda \, \mathrm{I}_d - L(e(\lambda)\, \mathrm{I}_d)$$

wird charakteristische Matrix und $\det[\Delta_L(\cdot)]$ charakteristische Funktion der Gleichung (1.1) genannt.

Satz 4.8.a gewährleistet, dass die charakteristische Matrix auf der Halbebene $\mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}}$ wohldefiniert ist.

Satz 4.11
Es seien $\mathcal{B}$ ein komplexer Phasenraum, der den Bedingungen B und C genügt, und L ein Operator in $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^d)$. Dann gilt für den infinitesimalen Erzeuger $\hat{\mathrm{A}}$ der Lösungshalbgruppe $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ von Gleichung (1.1):

$$\sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}} = \{\lambda \in \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}} \, : \, \det[\Delta_L(\lambda)] = 0\}.$$

Beweis: Siehe Satz 5.2.1 und Seite 138 in [HMN91]. □

Die Eigenwerte des infinitesimalen Erzeugers $\hat{\mathrm{A}}$ auf der Halbebene $\mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}}$ erlauben eine ähnliche Zerlegung des Phasenraumes $\mathcal{B}$ wie bei Gleichungen mit endlichem Gedächtnis des Raumes $C([-\alpha, 0], \mathbb{C}^d)$, vgl. Satz 7.2.1 in [HVL93]. Durch dieses Resultat lässt sich in den folgenden Resultaten das asymptotische Verhalten der Lösungen der Gleichung (1.1) in Abhängigkeit zur Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$ bestimmen.

Satz 4.12
Auf einem komplexen Phasenraum $\mathcal{B}$, der den Bedingungen B und C genügt, sei $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^d)$. Es bezeichne $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ die Lösungshalbgruppe der Gleichung (1.1) und $\hat{\mathrm{A}}$ den infinitesimalen Erzeuger. Für $\Lambda := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \sigma(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}}$ seien die Basen der k_j-dimensionalen Eigenräume $M_{\lambda_j}(\hat{\mathrm{A}})$ durch $\hat{\Phi}_j := (\hat{\Phi}^j_1, \ldots, \hat{\Phi}^j_{k_j})$ für $j = 1, \ldots, n$ gegeben. Mit $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda := (\hat{\Phi}_1, \ldots, \hat{\Phi}_n)$ und $k := k_1 + \cdots + k_n$ gilt:

a) *Es existieren Matrizen $G_j \in \mathbb{C}^{k_j \times k_j}$ für $j = 1, \ldots, , n$, so dass:*

$$\hat{\mathrm{A}}\, \hat{\Phi}_j = \hat{\Phi}_j \, G_j \qquad \text{für } j = 1, \ldots n.$$

Definiere $G_\Lambda := \mathrm{diag}(G_1, \ldots, G_n)$.

b) *$\sigma(G_j) = \lambda_j$ für $j = 1, \ldots, n$.*

c) *Für alle $a \in \mathbb{C}^k$ kann $\hat{\mathrm{T}}(t)\,\hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda\, a$ für $t \in \mathbb{R}$ definiert werden durch:*

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{T}}(t)\,\hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda\, a &= \hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda\, e^{tG_\Lambda} a,\\ \hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda(u) &= \hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda(0) e^{uG_\Lambda}, \quad u \leqslant 0.\end{aligned}$$

d) *Es existiert ein Unterraum $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda \subseteq \hat{\mathcal{B}}$ mit $\hat{\mathrm{T}}(t)\,\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda \subseteq \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ für $t \geqslant 0$, so dass*

$$\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda,$$

wobei $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda := \{\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{B}} : \hat{\varphi} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda\, a$ für ein $a \in \mathbb{C}^k\}$.

e) $\sigma(\hat{\mathrm{A}}\,|_{\hat{\mathrm{P}}_\Lambda}) = \Lambda$ *und* $\sigma(\hat{\mathrm{A}}\,|_{\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda \cap dom(\hat{\mathrm{A}})}) = \sigma(\hat{\mathrm{A}}) \setminus \Lambda.$

Beweis: Siehe Satz 5.3.1 in [HMN91]. □

In dieser Arbeit werden wir stets die Notationen des Satzes 4.12 benutzen, wenn von einer Zerlegung gemäß dieses Satzes gesprochen wird.
Um das asymptotische Verhalten der Vergangenheit x_t einer Lösung $x(\cdot) = x(\cdot, \varphi)$ der Gleichung (1.1) zu bestimmen, werden alle Eigenwerte $\Lambda(c) := \{\lambda \in \sigma(\hat{\mathrm{A}}) : \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant c)$ des infinitesimalen Erzeugers $\hat{\mathrm{A}}$ für ein $c > \beta_{\mathcal{B}}$ in die Zerlegung gemäß Satz 4.12 einbezogen. Die Menge $\Lambda(c)$ ist für jedes $c > \beta_{\mathcal{B}}$ nach Proposition 5.3.2 in [HMN91] endlich.

Satz 4.13
In der Situation des Satzes 4.12 mit $\Lambda := \Lambda(c) := \{\lambda \in \sigma(\hat{\mathrm{A}}) : Re\,\lambda \geqslant c\}$ für ein $c > \beta_{\mathcal{B}}$ existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $D = D(\varepsilon) > 0$, so dass:

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\mathrm{T}}(t)\,\hat{\varphi}\right\|_{\hat{\mathcal{B}}} &\leqslant De^{(c-\varepsilon)t}\,\|\hat{\varphi}\|_{\hat{\mathcal{B}}} \quad \text{für } t \leqslant 0,\ \hat{\varphi} \in \hat{\mathrm{P}}_\Lambda,\\ \left\|\hat{\mathrm{T}}(t)\,\hat{\varphi}\right\|_{\hat{\mathcal{B}}} &\leqslant De^{(c'+\varepsilon)t}\,\|\hat{\varphi}\|_{\hat{\mathcal{B}}} \quad \text{für } t \geqslant 0,\ \hat{\varphi} \in \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda,\end{aligned}$$

mit $c' := \sup\{Re\,\lambda\ :\ \lambda \in \sigma(\hat{\mathrm{A}}) \setminus \Lambda\} \vee \beta_{\mathcal{B}}$ und $\sup\emptyset = -\infty$.

Beweis: Siehe Satz 5.3.3 in [HMN91]. □

Bemerkung 4.14 Falls in Satz 4.13 der Parameter $\beta_{\mathcal{B}}$ negativ ist, so kann $c = 0$ gewählt werden. Gilt dann $\det[\Delta_L(\lambda)] \neq 0$ für alle $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0$, so folgt aus den Sätzen 4.11 und 4.13:

$$\left\|\hat{\mathrm{T}}(t)\,\hat{\varphi}\right\|_{\hat{\mathcal{B}}} \leqslant De^{-vt}\,\|\hat{\varphi}\|_{\hat{\mathcal{B}}} \quad \text{für } t \geqslant 0,\ \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{B}},$$

mit Konstanten D, $v > 0$. Siehe auch Korollar 5.3.5 in [HMN91].

Die Eigenschaft der Bemerkung 4.14 ist ein Spezialfall des so genannten “hyperbolischen” Falles, in dem keine Eigenwerte des infinitesimalen Erzeugers auf der imaginären Achse liegen. Dann besitzt Gleichung (1.1) eine “Sattelpunkteigenschaft”, die aus Satz 4.13 mit $c = 0$ folgt und in Korollar 5.3.4 in [HMN91] formuliert ist.

Bemerkung 4.15 Ein reeller Phasenraum $\mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ mit Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ kann durch $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} := \mathcal{B} + i\,\mathcal{B}$ komplexifiziert werden. Überträgt man die Zulässigkeit einer Norm für die Komplexifizierung gemäß Definition 3.7.5 in [DGVLW95] auf Semi-Normen und versieht $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ mit solch einer Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}$, so erfüllt auch $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ die Bedingung A, ist also ein komplexer Phasenraum. Ebenso übertragen sich die Bedingungen B, C und D auf $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$. Die Aussagen des Satzes 4.13 und analoge Aussagen, den Wert $\|\varphi\|_{\mathcal{B}}$ eines Elementes $\varphi \in \mathcal{B}$ betreffend, bleiben erhalten, da für eine zulässige Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}$ die Gleichheit $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \|\varphi + i0\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}$ gilt. Für diese und weitere Fragestellungen, den Dualraum, lineare Operatoren und weiteres betreffend, wird auf Abschnitt 3.7 in [DGVLW95] verwiesen. Speziell bei stochastischen Differentialgleichungen werden reelle Phasenräume betrachtet und Resultate dieses Abschnittes werden auf diese angewandt, ohne explizit auf diese Bemerkung zu verweisen.

5 Stabilität

Für die Lösung $x(\cdot, \varphi)$ der Gleichung (1.1) zu einer Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$ geht in das Änderungsverhalten von $x(t, \varphi)$ an jeder Stelle $t \geqslant 0$ die Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$ mit ein. Insbesondere ist die Vergangenheit x_t der Lösung $x(\cdot, \varphi)$ für $t \geqslant 0$ auf dem Intervall $(-\infty, -t]$ für $t \geqslant 0$ identisch zu der “verschobenen” Anfangsbedingung $S(t)\varphi$, wobei $S(\cdot)$ in (3.11) definiert ist. Denn es lässt sich die Vergangenheit x_t für $t \geqslant 0$ zerlegen in $x_t = U(t)\varphi + S(t)\varphi$ mit

$$(U(t)\varphi)(u) := \begin{cases} x_t(u, \varphi) - \varphi(0) & , \, u \in [-t, 0], \\ 0 & , \, u \leqslant -t. \end{cases}$$

Bei asymptotischen Fragestellungen für $t \to \infty$ ist aber das Verhalten von $U(t)$ von größerem Interesse als von $S(t)\varphi$, da die Funktion $S(t)\varphi$ unabhängig von der Differentialgleichung (1.1) ist. Speziell bei den in diesem Abschnitt behandelten Stabilitätsfragen ist das Verhalten von $\|x_t\|_{\mathcal{B}}$ für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von dem Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$, der die Differentialgleichung (1.1) beschreibt, von Interesse, und nicht das Verhalten von $\|S(t)\varphi\|_{\mathcal{B}}$, das alleine von dem gewählten Phasenraum $\mathcal{B}$ abhängt.
Diese Problematik ist in der folgenden Definition von Phasenräumen mit verblassendem Gedächtnis berücksichtigt. Statt des Operators $S(t)$ wie in der heuristischen Einleitung wird dessen Einschränkung auf

$$\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}_0(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) := \{\varphi \in \mathcal{B} \,:\, \varphi(0) = 0\}$$

für $t \geqslant 0$ betrachtet:

$$S_0(t) : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0, \quad (S_0(t)\varphi)(u) := \begin{cases} 0 & , u \in [-t, 0], \\ \varphi(t+u) & , u \leqslant -t. \end{cases}$$

Wegen Bedingung A an den Phasenraum ist $S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0)$ für jedes $t \geqslant 0$.

Definition 5.1

a) *Ein Phasenraum $\mathcal{B}$ ist von* verblassendem Gedächtnis, *falls $\mathcal{B}$ den Bedingungen B und D genügt, sowie die folgende Konvergenz erfüllt:*

$$\lim_{t\to\infty} \|S_0(t)\varphi\|_{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{B}_0\,.$$

b) *Ein Phasenraum $\mathcal{B}$ ist von* gleichmäßig verblassendem Gedächtnis, *falls $\mathcal{B}$ den Bedingungen B und D genügt, sowie die folgende Konvergenz erfüllt:*

$$\lim_{t\to\infty} \|S_0(t)\|_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}_0} = 0.$$

Bemerkung 5.2 Für einen Phasenraum $\mathcal{B}$ von verblassendem Gedächtnis ist $\beta_{\mathcal{B}} \leqslant 0$. Denn nach Satz 7.1.5 in [HMN91] kann dann die Funktion N in Bedingung A konstant gewählt werden. Weiter gilt nach Lemma 4.3.1 in [HMN91] für $t \geqslant 0$:

$$\alpha(\hat{S}(t)) \leqslant \|S_0(t)\|_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}_0} \leqslant N(t),$$

wobei die letzte Ungleichung sich aus der Bedingung A.c ergibt. Die Behauptung folgt aus Definition 4.2 von $\beta_{\mathcal{B}}$.
Für einen Phasenraum $\mathcal{B}$ von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis ist $\beta_{\mathcal{B}} < 0$. Denn nach Satz 4.3.5 in [HMN91] impliziert

$$\|S_0(t)\|_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}_0} < 1$$

für ein $t > 0$ bereits $\beta_{\mathcal{B}} < 0$.

Beispiel 5.3 Der Phasenraum $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ ist von verblassendem Gedächtnis, falls $g(u) \to \infty$ für $u \to -\infty$ gilt und die in (2.5) definierte Funktion G beschränkt ist. Zunächst erfüllt C_g^0 nach Beispiel 2.8 und 2.9 die Bedingungen B und D. Weiter erhält man für beliebige T, $u_0 < 0$ sowie $\varphi \in C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ und $-t \leqslant u_0$:

$$\begin{aligned} \|S_0(t)\varphi\|_{C_g^0} &= \sup_{u\leqslant 0} \left|\varphi(u)(g(u-t))^{-1}\right| \\ &\leqslant \sup_{u\leqslant T} \left|\varphi(u)(g(u))^{-1}\right| G(t) + \sup_{u\in[T,0]} |\varphi(u)| \sup_{u\leqslant u_0} \left|(g(u))^{-1}\right|. \end{aligned}$$

Da $\varphi(u)(g(u))^{-1} \to 0$ und $g(u) \to \infty$ für $u \to -\infty$ vorausgesetzt sind, folgt die Behauptung.
Der Phasenraum $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ ist genau dann von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis, falls $G(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Denn nach Satz 1.4.2 in [HMN91] gilt für $t \geqslant 0$:

$$\|S_0(t)\|_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0} = G(t).$$

Beispiel 5.4 Der Phasenraum $C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ ist nach Beispiel 7.1.7 in [HMN91] genau dann von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis, falls $\gamma < 0$ ist.

Beispiel 5.5 Der Phasenraum $(C[\rho, 0] \times L_g^p)(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ ist von verblassendem Gedächtnis, falls

$$\int_{-\infty}^{\rho} g(u)du < \infty.$$

Dieser Phasenraum ist genau dann von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis, falls

$$\operatorname{ess\,sup}\{g(u-t)(g(u))^{-1} \,:\, u \leqslant \rho\} \to 0 \quad \text{für } t \to \infty.$$

Siehe hierzu Beispiel 7.1.8 in [HMN91].

Ein Phasenraum $\mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ enthält den Raum $C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ der stetigen und beschränkten Funktionen, falls er der Bedingung D genügt. Dies zeigt das folgende Lemma:

Lemma 5.6
Für einen Phasenraum $\mathcal{B}$, der der Bedingung D genügt, gilt:

a) $C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) \subseteq \{\varphi \in \mathcal{B} \,:\, \lim_{n\to\infty} \|\varphi - \psi^n\|_{\mathcal{B}} = 0 \quad \textit{für } \{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)\}$.

b) $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leqslant C\, \|\varphi\|_{C_b}$ *für alle* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ *mit einer Konstanten* $C > 0$.

Beweis: Siehe Proposition 7.1.1 in [HMN91]. □

Im Folgenden werden gemäß [HMN91] verschiedene grundlegende Charakterisierungen der Stabilität der Gleichung (1.1) vorgestellt. Hierzu wird für $\sigma \geqslant 0$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(x_t) \quad \text{für } t \geqslant \sigma, \\ x_\sigma &= \varphi, \end{aligned} \tag{5.17}$$

mit $\varphi \in \mathcal{B}$ betrachtet. Nach Satz 4.1.2 in [HMN91] existiert für jedes $\sigma \geqslant 0$ und $\varphi \in \mathcal{B}$ eine eindeutige Lösung der Gleichung (5.17) im Sinn von Definition 1.1, falls diese Definition in offensichtlicher Weise an Gleichung (5.17) angepasst wird. Die Lösung der Gleichung (5.17) wird mit $x(\cdot, \varphi, \sigma)$ und deren Vergangenheit für $t \geqslant \sigma$ mit $x_t(\cdot, \varphi, \sigma)$ bezeichnet.
Weitere Stabilitätskonzepte für funktionale Differentialgleichungen enthält [LWZ94].

Definition 5.7
Zu einem Phasenraum $\mathcal{B}$ und $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ bezeichne $x(\cdot, \varphi, \sigma)$ die Lösung von Gleichung (5.17) für $\sigma \geqslant 0$.

a) *Die Gleichung (1.1) heißt* stabil in $\mathcal{B}$, *falls gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, \sigma \geqslant 0\, \exists\, \delta(\varepsilon, \sigma) > 0\ :\quad \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leqslant \delta(\varepsilon, \sigma) \implies \|x_t(\cdot, \sigma, \varphi)\|_{\mathcal{B}} \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } t \geqslant \sigma.$$

Falls $\delta(\varepsilon, \sigma)$ unabhängig von σ gewählt werden kann, heißt die Gleichung gleichmäßig stabil in $\mathcal{B}$.

b) *Die Gleichung (1.1) heißt* asymptotisch stabil in $\mathcal{B}$, *falls sie stabil in $\mathcal{B}$ ist und es gilt:*

$$\forall\, \sigma \geqslant 0\, \exists\, \delta(\sigma) > 0\ :\ \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leqslant \delta(\sigma) \implies \lim_{t \to \infty} \|x_t(\cdot, \sigma, \varphi)\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

c) *Die Gleichung (1.1) heißt* gleichmäßig asymptotisch stabil in $\mathcal{B}$, *falls sie gleichmäßig stabil in $\mathcal{B}$ ist und es gilt:*

$$\exists\, \delta > 0\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, C(\varepsilon) > 0\ :\quad \|\varphi\|_{\mathcal{B}} < \delta \implies \|x_t(\cdot, \sigma, \varphi)\|_{\mathcal{B}} \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } t \geqslant \sigma + C(\varepsilon),\ \sigma \geqslant 0.$$

d) *Ersetzt man in den Definitionen a - c die Norm $\|x_t(\cdot, \sigma, \varphi)\|_{\mathcal{B}}$ durch $|x(t, \sigma, \varphi)|$, so spricht man von* stabil/ gleichmäßig stabil/ asymptotisch stabil/ gleichmäßig asymptotisch stabil in $\mathbb{K}^d$.

Wegen der Bedingung A.b an einen Phasenraum $\mathcal{B}$ implizieren die verschiedenen Arten von Stabilität in $\mathcal{B}$ der Gleichung (1.1) gemäß Definition 5.7 die jeweilige Stabilität in $\mathbb{K}^d$. Eine umgekehrte Implikation für Phasenräume mit (gleichmäßig) verblassendem Gedächtnis gibt das folgende Lemma an.

Lemma 5.8

a) *Falls $\mathcal{B}$ ein Phasenraum von verblassendem Gedächtnis ist, dann folgt:*

falls die Gleichung (1.1) stabil/ gleichmäßig stabil/ asymptotisch stabil in $\mathbb{K}^d$ ist, so gilt dies auch in $\mathcal{B}$.

b) *Falls $\mathcal{B}$ ein Phasenraum von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis ist, dann folgt:*

falls die Gleichung (1.1) gleichmäßig asymptotisch stabil in $\mathbb{K}^d$ ist, so gilt dies auch in $\mathcal{B}$.

Beweis: Siehe Proposition 7.2.5 in [HMN91]. $\square$

Jeder Phasenraum $B = \mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ enthält nach Lemma 2.3 den Raum $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$. Ein Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ besitzt gemäß Satz 3.1 auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ eine Darstellung als Integraloperator. Da vollständige Phasenräume von verblassendem Gedächtnis den Raum $C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ nach Lemma 5.6 enthalten, kann die Integraldarstellung eines Operators $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ auf $C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ fortgesetzt werden:

Lemma 5.9
Es seien $\mathcal{B}$ ein Phasenraum von verblassendem Gedächtnis und $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$. Dann existiert ein Maß $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$, so dass

$$L\varphi = \int_{(-\infty,0]} \nu(du)\,\varphi(u) \quad \textit{für alle } \varphi \in C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d).$$

Beweis: Siehe Proposition 7.2.7 in [HMN91]. □

Insbesondere hat Lemma 5.9 zur Konsequenz, dass auf einem Phasenraum $\mathcal{B}$ von verblassendem Gedächtnis die charakteristische Matrix Δ_L eines Operators $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ auf $\overline{\mathbb{C}}_0$ wohldefiniert ist und die folgende Darstellung besitzt:

$$\Delta_L : \overline{\mathbb{C}}_0 \to \mathbb{C}^{d\times d}, \quad \Delta_L(\lambda) = \lambda\, \mathrm{I}_d - \int_{(-\infty,0]} e^{\lambda s}\, \mathrm{I}_d\ \nu(ds). \tag{5.18}$$

Man erhält eine einfache Charakterisierung der Stabilität der Differentialgleichung (1.1) durch die charakteristische Funktion des Operators L.

Satz 5.10

a) *Es sei $\mathcal{B}$ ein Phasenraum von verblassendem Gedächtnis und $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$. Dann gilt:*

$$\textit{Gleichung (1.1) ist asymptotisch stabil in } \mathcal{B} \iff \Delta_L(\lambda) \neq 0 \quad \textit{für alle } \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0.$$

b) *Es sei $\mathcal{B}$ ein Phasenraum von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis und $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$. Dann gilt:*

$$\textit{Gleichung (1.1) ist gleichmäßig asymptotisch stabil in } \mathcal{B}$$
$$\iff \Delta_L(\lambda) \neq 0 \quad \textit{für alle } \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0.$$

Beweis: Siehe Satz 7.2.8 in [HMN91] □

Erfüllt der Phasenraum $\mathcal{B}$ in Satz 5.10.b zusätzlich die Bedingungen B und C, so gibt Bemerkung 4.14 wegen Bemerkung 5.2 eine exponentielle Abschätzung der Lösungshalbgruppe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ von Gleichung (1.1) an. Ohne Benutzung der Spektraltheorie des

Abschnittes 2.4, sondern mittels des Zuganges der Phasenräume von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis erhält man dasselbe Resultat, das in dem folgenden Korollar festgehalten ist.

Korollar 5.11
Es seien $\mathcal{B}$ ein Phasenraum von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis und L ein Operator in $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ mit $\Delta_L(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0$. Dann existieren Konstanten D, $v > 0$, so dass für die Lösungshalbgruppe $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ von Gleichung (1.1) für $t \geqslant 0$ gilt:

$$\|T(t)\varphi\|_{\mathcal{B}} \leqslant De^{-vt} \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{B}\,.$$

Beweis: Siehe Korollar 7.2.9 in [HMN91]. □

Kapitel 3

Volterra-Integro-Differentialgleichungen

Die Rolle der so genannten Fundamentallösung bei linearen Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis wird von der Differential-Resolvente bei unendlichem Gedächtnis übernommen. Im ersten Abschnitt 3.1 geben wir ein aus der Theorie der Volterra-Gleichungen bekanntes Existenzresultat und einige grundlegenden Eigenschaften der Differential-Resolvente an. Bei der Behandlung von affinen stochastischen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis im weiteren Verlauf dieser Arbeit sind äquivalente Aussagen über Integrierbarkeitseigenschaften und asymptotisches Verhalten der Differential-Resolvente von Bedeutung. Solche Eigenschaften, die bei der üblichen Behandlung von Volterra-Gleichungen nicht im Vordergrund stehen, können wir im zweiten Teil dieses Kapitels in den Sätzen 2.7 und 2.10 formulieren. Der Nachweis dieser Resultate basiert teilweise auf bekannten Ergebnissen aus der Stabilitätsanalyse von Volterra-Gleichungen.

1 Differential-Resolvente

Zur Darstellung der Lösung einer linearen funktionalen Differentialgleichung gemäß Satz 2.3.3 spielt die Differential-Resolvente eines Maßes eine wesentliche Rolle. Eine eingehendere Untersuchung erfährt die Differential-Resolvente in der Behandlung von linearen Volterra-Integro-Differentialgleichung wie in [GLS90] oder [Bur83].
Die bereits in Kapitel 2 beschriebene Differentialgleichung lautet:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \int_{[-t,0]} \nu(ds)\, r(t+s)ds = \int_{[-t,0]} r(t+s)\, \nu(ds) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ r(0) &= \mathrm{I}_d, \end{aligned} \tag{1.1}$$

für ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$.

Satz 1.1
Für ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ existiert eine eindeutige, lokal absolutstetige Funktion $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}^{d\times d}$ mit $r(0) = \mathrm{I}_d$, die der Gleichung (1.1) für (Lebesgue) fast alle $t \geqslant 0$ genügt. Die Ableitung $\dot r$ ist (Lebesgue) fast überall gleich einer Funktion, die lokal von beschränkter Variation ist.

Beweis: Siehe Satz 3.3.1 in [GLS90]. □

Die Funktion r, die der Gleichung (1.1) gemäß Satz 1.1 genügt, wird *Differential-Resolvente* des Maßes $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ genannt.
Die eigentliche Bedeutung der Differential-Resolvente liegt in der Behandlung von linearen Volterra-Integro-Differentialgleichungen, die in engem Zusammenhang zu linearen funktionalen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis stehen, die in Kapitel 2 behandelt werden. Die folgende Bemerkung deutet dies an.

Bemerkung 1.2 Eine lineare inhomogene Volterra-Integro-Differentialgleichung ist für ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ und eine Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^d)$ von der Form:

$$\begin{aligned} \dot x(t) &= \int_{[-t,0]} \nu(du)\, x(t+u) + f(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x(0) &= x_0 \quad \text{für } x_0 \in \mathbb{K}^d\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nach Satz 3.3.3 in [GLS90] existiert eine eindeutige Funkion $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}^d$ mit $x(0) = x_0$, die lokal absolutstetig auf $\mathbb{R}_+$ ist und der Gleichung (1.2) (Lebesgue) fast überall genügt. Mit der Differential-Resolvente r des Maßes $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ kann diese Funktion x dargestellt werden:

$$x(t) = r(t)x_0 + \int_0^t r(t-s) f(s)\, ds \quad \text{für } t \geqslant 0.$$

Andererseits betrachte man auf einem Phasenraum $\mathcal{B}$ eine Differentialgleichung mit unendlichem Gedächtnis, wie sie in Kapitel 2 behandelt wird:

$$\dot x(t) = \int_{(-\infty,0]} \nu(du)\, x(t+u) \quad \text{für } t \geqslant 0 \quad \text{und} \quad x_0 = \varphi \in \mathcal{B},$$

mit einem Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$. Alternativ ist dies darstellbar als:

$$\dot x(t) = \int_{[-t,0]} \nu(du)\, x(t+u) + \int_{(-\infty,-t)} \nu(du)\, \varphi(t+u) \quad \text{für } t \geqslant 0, \quad x(0) = \varphi(0),$$

was einer Integro-Differentialgleichung der Form (1.2) entspricht.

Endliches Gedächtnis 1.3 Für Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis der Länge $\alpha \geqslant 0$ bezeichnet man die Lösung $x : [-\alpha, \infty) \to \mathbb{K}^{d\times d}$ der Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_{[-\alpha,0]} \nu(ds)\, x(t+s) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x(0) &= \mathrm{I}_d, \quad x(u) = 0 \quad \text{für } u \in [-\alpha, 0), \end{aligned} \tag{1.3}$$

als Fundamentallösung des Maßes $\nu \in M([-\alpha, 0], \mathbb{K}^{d\times d})$ (Seite 171 in [HVL93]). Setzt man die Differential-Resolvente r des Maßes ν, das in diesem Fall den endlichen Träger $[-\alpha, 0]$ besitzt, auf dieses Intervall durch $r(u) := 0$ für $u \in [-\alpha, 0)$ fort, so ist die Differential-Resolvente r gerade die Fundamentallösung x.

Wie bei Gleichungen mit endlichem Gedächtnis spielt zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Differential-Resolvente ihre Laplace-Transformierte eine wesentliche Rolle. Die Laplace-Transformierte von Funktionen und Maßen wird in der folgenden Definition eingeführt. Zu beachten ist die asymmetrische Definition von Funktionen, die auf der negativen oder positiven Achse definiert sind. Eine Einbettung der Volterra-Theorie in die Theorie der funktionalen Differentialgleichungen erfordert dies jedoch.

Definition 1.4
Es seien $i, j \in \mathbb{N}$. Die Laplace-Transformierte einer Funktion f ist definiert für

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}^{i\times j} : \quad \hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt \quad \textit{für } \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Die Laplace-Transformierte für ein Maß ν ist definiert für

$$\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{i\times j}) : \quad \hat{\nu}(\lambda) := \int_{(-\infty,0]} e^{\lambda u}\, \nu(du) \quad \textit{für } \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Die Integrale sind als Lebesgue-Integrale gemäß Anhang B zu verstehen und die Laplace-Transformierten sind für solche $\lambda \in \mathbb{C}$ definiert, für die die Integrale existieren.

Bei den Laplace-Transformierten der Maße, die in den Gleichungen (1.1) oder (1.3) die Vergangenheit gewichten, treten erste Unterschiede zwischen Gleichungen mit endlichem Gedächtnis und Volterra-Gleichungen auf. Denn für ein Maß, das keinen kompakten Träger besitzt, wie dies üblicherweise bei den Gleichungen (1.1) der Fall ist, muss die Laplace-Transformierte nicht existieren. Selbst für endliche Maße existiert diese im Allgemeinen nur auf der Halbebene $\overline{\mathbb{C}}_0$. Zur Beschreibung der Halbebene, auf der die Laplace-Transformierte eines Maßes existiert, wird der folgende Parameter eingeführt.

Definition 1.5
Für ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ definiere

$$\hat{\beta}_\nu := \inf\{b \in \mathbb{R} : \int_{(-\infty,0]} e^{bu}\, |\nu|(du) < \infty\} \quad \textit{mit } \inf\emptyset = \infty.$$

Der Parameter $\hat{\beta}_\nu$ wird Konvergenzabszisse der Laplace-Transformierten $\hat{\nu}$ *genannt.*

Für beliebige Maße ν kann der Parameter $\hat{\beta}_\nu$ Werte in $[-\infty, \infty]$ annehmen, für endliche Maße ν ist $\hat{\beta}_\nu \leqslant 0$. Für ein Maß ν mit kompaktem Träger ist $\hat{\beta}_\nu = -\infty$. Die Laplace-Transformierte $\hat{\nu}$ eines Maßes $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ existiert auf $\mathbb{C}_{\hat{\beta}_\nu} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \hat{\beta}_\nu\}$, jedoch nicht unbedingt auf der Achse $\operatorname{Re}\lambda = \hat{\beta}_\nu$.
Die Bedeutung der im Folgenden definierten charakteristischen Funktion eines Maßes liegt darin, mittels dieser Funktion die Laplace-Transformierte der Differential-Resolvente darstellen zu können, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

Definition 1.6
Für ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ wird die Funktion

$$\Delta_\nu : \mathbb{C}_{\hat{\beta}_\nu} \to \mathbb{C}^{d\times d}, \quad \Delta_\nu(\lambda) := \lambda \, \mathrm{I}_d - \hat{\nu}(\lambda),$$

charakteristische Matrix und $\det[\Delta_\nu(\cdot)]$ *charakteristische Funktion der Gleichung* (1.1) *genannt.*

Bemerkung 1.7 Für einen Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^d)$ auf einem Phasenraum $\mathcal{B}$ ist in Definition 2.4.10 die charakteristische Matrix Δ_L definiert. Des Weiteren besitzt der Operator L auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^d)$ gemäß Satz 2.3.1 eine Darstellung als Integraloperator mit einem Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^{d\times d})$. Im Allgemeinen kann die charakteristische Matrix Δ_ν des Maßes ν nicht mit der charakteristischen Matrix Δ_L des Operators L gleichgesetzt werden, da die Darstellung von L als Integraloperator zunächst nur auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^d)$ gewährleistet ist. Jedoch kann im Fall eines Phasenraumes von verblassendem Gedächtnis die charakteristische Matrix Δ_L des Operators gemäß (2.5.18) auf $\overline{\mathbb{C}}_0$ dargestellt werden. Nach Lemma 2.5.9 gilt für das Maß ν dann $\hat{\beta}_\nu \leqslant 0$ und die charakteristischen Matrizen Δ_ν und Δ_L sind auf $\overline{\mathbb{C}}_0$ definiert und identisch.

Bemerkung 1.8 Für ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ mit $\hat{\beta}_\nu < \infty$ gilt:

a) $\lambda \mapsto \Delta_\nu(\lambda)$ ist analytisch auf $\mathbb{C}_{\hat{\beta}_\nu}$.

b) $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \det[\Delta_\nu(\lambda)] = 0, \, \lambda \in \mathbb{C}_{\hat{\beta}_\nu}\} < \infty$.

c) Für $c > \hat{\beta}_\nu$ ist die Menge

$$\Lambda_\nu(c) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det[\Delta_\nu(\lambda)] = 0, \, \operatorname{Re}\lambda \geqslant c\}$$

endlich.

Beweis: a) Die Aussage folgt aus Eigenschaften von Laplace-Transformierten, die etwa in Satz 3.8.2 in [GLS90] aufgeführt sind.
b) Für $c > \hat{\beta}_\nu$ sei $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_c$ mit $\det[\Delta_\nu(\lambda)] = 0$. Man erhält:

$$|\lambda| \leqslant \int_{(-\infty,0]} e^{u(\operatorname{Re}\lambda - c)} e^{cu} \, |\nu|(du) \leqslant \|e(c)\, d|\nu|\|_{TV}, \tag{1.4}$$

was die Behauptung verifiziert.
c) Ungleichung (1.4) impliziert, dass $\Lambda_\nu(c)$ in der kompakten Menge $K := \overline{\mathbb{C}}_c \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|e(c)\, d|\nu|\|_{TV}\}$ enthalten ist. Da nach Aussage a die charakteristische Funktion $\det[\Delta_\nu(\cdot)]$ analytisch auf $\overline{\mathbb{C}}_c$ ist, folgt die Behauptung aus dem Identitätssatz der Funktionentheorie (Satz 10.18 in [Rud87]), falls die charakteristische Funktion $\det[\Delta_\nu(\cdot)]$ nicht identisch 0 ist. Letzteres kann aber nicht der Fall sein, da $|\Delta_\nu(\lambda)| \to \infty$ für $|\lambda| \to \infty$. □

Endliches Gedächtnis 1.9 Beschreibt ein Maß $\nu \in M([-\alpha, 0], \mathbb{K}^{d\times d})$ eine Differentialgleichung mit endlichem Gedächtnis der Länge $\alpha \geqslant 0$ der Form (1.3), so ist die charakteristische Funktion Δ_ν nach Bemerkung 1.8.a eine ganze Funktion, da $\hat{\beta}_\nu = -\infty$ ist. Des Weiteren besitzt die Funktion Δ_ν nach 1.8.c in jedem vertikalen Streifen $c_1 \leqslant \operatorname{Re} \lambda \leqslant c_2$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ nur endlich viele Nullstellen. Diese Aussagen sind in Satz 1.4.4 in [DGVLW95] zusammengefasst. Falls das Maß $\nu \in M([-\alpha, 0], \mathbb{K}^{d\times d})$ nicht einem Punktmaß in 0 entspricht, kann mittels einer Verallgemeinerung des Satzes von Liouville der Funktionentheorie gezeigt werden, dass die charakteristische Funktion $\det[\Delta_\nu(\cdot)]$ unendlich viele Nullstellen besitzt. Für ein Maß $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ mit nichtkompaktem Träger, das also eine Volterrasche Differentialgleichung der Form (1.1) beschreibt, müssen diese Eigenschaften nicht mehr gelten, siehe etwa Beispiel 5.2.5. Auf einige Konsequenzen dieser Unterschiede wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

2 Asymptotische Eigenschaften

Für den Nachweis der Existenz einer stationären Lösung einer affinen, stochastischen Differentialgleichung mit unendlichem Gedächtnis, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit behandelt wird, sind äquivalente Aussagen von Integrierbarkeitseigenschaften der Differential-Resolvente eines endlichen Maßes und deren Konvergenzrate von Bedeutung. Zwischen der Integrierbarkeit der Differential-Resolvente und Stabilitätsaussagen für die Integro-Differentialgleichung (1.1) besteht ein enger Zusammenhang, siehe [Mil71]. Voraussetzungen, die die Integrierbarkeit betreffen und die Existenz einer stationären Lösung garantieren, können verifiziert werden durch bekannte, hinreichende Bedingungen für die Stabilität der Gleichung (1.1). Deshalb wird in diesem Abschnitt kurz auf die Literatur eingegangen, die Stabilitätsaussagen behandelt. Für die Definition der verschiedenen Arten von Stabilität für Gleichung (1.1) verweisen wir auf Definitionen 2.4.1 bis 2.4.4 in [Bur83] oder auf eine naheliegende Übertragung der Definition 2.5.7.
Asymptotische Aussagen für die Differential-Resolvente können oft mit ihrer Laplace-Transformierten gewonnen werden. Die Existenz der Laplace-Transformierten der Differential-Resolvente eines endlichen Maßes gewährleistet das folgende Lemma.

Lemma 2.1
Für die Differential-Resolvente r eines Maßes $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ gilt:

a) $|r(t)| \leqslant \sqrt{d}\ \exp(\|\nu\|_{TV}\, t)$ *für alle* $t \geqslant 0$.

b) $|\dot{r}(t)| \leqslant \sqrt{d}\ \|\nu\|_{TV} \exp(\|\nu\|_{TV}\, t)$ *für (Lebesgue) fast alle* $t \geqslant 0$.

c) $\hat{r}(\lambda) = (\lambda\, \mathrm{I}_d - \hat{\nu}(\lambda))^{-1}$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit Re* $\lambda > \|\nu\|_{TV}$.

Beweis: Der Nachweis erfolgt durch einfache Abschätzungen und übliche Formeln für Laplace-Transformierte von Ableitungen und Faltungen einer Funktion, wie sie in Satz 3.8.2 und 3.8.4 in [GLS90] zu finden sind. □

Die Darstellung der Laplace-Transformierten $\hat{r}$ der Differential-Resolvente r eines Maßes $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ in Satz 2.1.c ausnutzend, kann das asymptotische Verhalten von r in Abhängigkeit der Nullstellen der charakteristischen Funktion $\det[\Delta_\nu(\cdot)]$ bestimmt werden. Die im folgenden Satz betrachtete Menge $\Lambda_\nu(c)$ für $c > \hat{\beta}_\nu$ ist nach Bemerkung 1.8.c endlich.

Satz 2.2
Für ein Maß $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ *sei* $\Lambda_\nu(c) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *für* $c > \hat{\beta}_\nu$*. Dann gilt für die Differential-Resolvente* r *von* ν *für* $t \geqslant 0$*:*

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) e^{\lambda_i t} + F(t), \tag{2.5}$$

wobei p_i *Polynome über* $\mathbb{C}^{d\times d}$ *für* $i = 1, \ldots n$ *sind und* $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^{d\times d}$ *eine stetige Funktion ist mit* $F(t) = o(\exp(ct))$ *für* $t \to \infty$.

Beweis: Die behauptete Darstellung kann wie in Satz 7.2.1 in [GLS90] nachgewiesen werden. Das Verhalten der Funktion F kann analog zu dem Fall eines endlichen Gedächtnisses in Satz 1.5.4 in [DGVLW95] bestimmt werden. □

Endliches Gedächtnis 2.3 Satz 2.2 entspricht dem analogen Resultat 1.5.4 in [DGVLW95] für Gleichungen mit endlichem Gedächtnis bis auf die Einschränkung, den Parameter c größer als die Konvergenzabszisse $\hat{\beta}_\nu$ zu wählen, was zurückgeht auf den Definitionsbereich der Laplace-Transformierten $\hat{\nu}$ des Maßes $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$. Zwei Konsequenzen dieses "kleinen" Unterschiedes sollen verdeutlicht werden:

a) Bei einem Maß $\nu \in M([-\alpha, 0], \mathbb{K}^{d\times d})$, das eine Gleichung der Form (1.3) mit endlichem Gedächtnis beschreibt, erlaubt die Eigenschaft $\hat{\beta}_\nu = -\infty$, vereinfacht gesprochen, alle Nullstellen der charakteristischen Funktion $\det[\Delta_\nu(\cdot)]$ in die Darstellung gemäß Satz 2.2 einzubeziehen und die Fundamentallösung x als Reihenlösung zu repräsentieren (siehe Korollar 5.6.4 in [DGVLW95]):

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) e^{\lambda_i t} \quad \text{für } t > 0,$$

wobei p_i Polynome über $\mathbb{C}^{d\times d}$ und $\lambda_i \in \mathbb{C}$ für $i \in \mathbb{N}$ sind. Für ein Maß $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ mit $\hat{\beta}_\nu > -\infty$ wird durch den endlichen Wert von $\hat{\beta}_\nu$ diesem Verfahren eine Grenze gesetzt. Durch einen gänzlich anderen Zugang gelingt in Kapitel 7 eine ähnliche Reihendarstellung für die Differential-Resolvente eines Maßes $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$.

b) Falls $\hat{\beta}_\nu < 0$ und $\det[\Delta_\nu(\lambda)] \neq 0$ für alle $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0$ für ein Maß $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ gilt, so folgt wegen Bemerkung 1.8.c die Existenz eines $c < 0$ mit $\det[\Delta_\nu(\lambda)] \neq 0$ für alle $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_c$, siehe auch Satz 2.7. Aus Satz 2.2 folgt ein exponentielles Abfallen der Differential-Resolvente des Maßes ν. Diese Argumentation ist wohlbekannt aus der Theorie von Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis (Korollar 1.5.5 in [DGVLW95]). Falls für das Maß ν aber $\hat{\beta}_\nu = 0$ gilt, kann diese Schlussweise nicht angewandt werden. Genau in diesem Fall kann die Differential-Resolvente des Maßes ν ein asymptotisches Verhalten besitzen, das bei Fundamentallösungen der Differentialgleichung (1.3) nicht auftreten kann. Dies zeigt das Beispiel 2.9 am Ende dieses Abschnittes.

Satz 2.4
Für die Differential-Resolvente r eines endlichen Maßes $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ gilt:

$$r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d}) \iff \det[\Delta_\nu(\lambda)] \neq 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0.$$

Des Weiteren ist in diesem Fall $\dot{r} \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d})$ und $\dot{r}$ ist (Lebesgue) fast überall gleich einer Funktion von beschränkter Variation.

Beweis: Siehe Satz 3.3.5 in [GLS90]. □

Da die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente r eines Maßes $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ nach Satz 2.4 die Integrierbarkeit ihrer Ableitung $\dot{r}$ impliziert, folgt $r(t) \to 0$ für $t \to \infty$ in diesem Fall.

Bemerkung 2.5 Für Maße der Form

$$\nu(du) = a\,\delta_0(du) + f(u)\,du, \quad f \in L^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d}),\ a \in \mathbb{K}^{d\times d} \tag{2.6}$$

ist in [Mil71] und [GM73] die Äquivalenz von gleichmäßiger asymptotischer Stabilität der Differentialgleichung (1.1) und Integrierbarkeit der Differential-Resolvente gezeigt. Unter Ausnutzung dieses Resultates in Verbindung mit Satz 2.4 sind zahlreiche Arbeiten mit hinreichenden Bedingungen für die gleichmäßige asymptotische Stabilität der Gleichung (1.1) erschienen. Als einen Artikel mit Überblickscharakter sei die Arbeit [BM83] erwähnt. Weitere Resultate findet man in [Bur83], [Jor79] und [Mil71] sowie vielen anderen.

Eine graphische Verifikation der Bedingung in Satz 2.4 bietet der Satz von Nyquist (Satz 3.3.15 in [GLS90]), der auf dem funktionentheoretischen Residuenkalkül basiert.

Einige einfache Integrierbarkeitseigenschaften von Differential-Resolventen werden im folgenden Lemma zusammengestellt.

Lemma 2.6

a) *Für die Differential-Resolvente r eines Maßes $\nu \in M^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ gilt:*

$$r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d}) \iff r(t) \to 0 \quad \text{für } t \to \infty.$$

b) *Für die Differential-Resolvente r eines Maßes $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ gilt für $p \geqslant 1$:*

$$r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d}) \implies r \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d}).$$

c) *Für die Differential-Resolvente r eines Maßes $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ gilt für $p \geqslant 1$:*

$$r \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d}) \implies \dot r \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d}).$$

Beweis: a) Siehe Satz 3.3.17 in [GLS90].
b) Da die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente r die Konvergenz von r gegen Null wegen Satz 2.4 impliziert, folgt die Behauptung aus der Stetigkeit von r.
c) Mit der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Fubini ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} |\dot r(s)|^p \, ds &\leqslant \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[-s,0]} |r(s+u)| \; |\nu|(du) \right)^p ds \\ &\leqslant \|\nu\|_{TV}^{p-1} \int_{\mathbb{R}_-} \left(\int_0^\infty |r(s)|^p \, ds \right) |\nu|(du) \\ &= \|\nu\|_{TV}^p \, \|r\|_{L^p}^p .\end{aligned}$$ □

Auf Satz 2.2 basieren die äquivalenten Aussagen über Integrierbarkeit und Konvergenzraten der Differential-Resolvente im folgenden Satz.

Satz 2.7

Für die Differential-Resolvente r eines Maße $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ mit $\hat\beta_\nu < 0$ sind äquivalent:

a) *$det\,[\Delta_\nu(\lambda)] \neq 0 \quad$ für alle $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0$;*

b) *$|r(t)| = o(e^{bt})$ für $t \to \infty$ und einer Konstanten $b \in (\hat\beta_\nu, 0)$;*

c) *$r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d})$;*

d) *$r \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d})$.*

In diesem Fall gilt mit der Konstanten b aus Aussage b und jeder Konstanten $c \in (b,0)$ für $i = 0,1$:

$$\left|r^{(i)}(t)\right| = o(e^{ct}) \text{ für } t \to \infty \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \left|r^{(i)}(s)\right| e^{-cs} ds < \infty,$$

wobei $r^{(0)} := r$ und $r^{(1)} := \dot{r}$.

Beweis: Die Äquivalenz der Eigenschaften a und c ist die Aussage des Satzes 2.4. Aus Aussage b folgt unmittelbar Aussage c, die wegen Lemma 2.6.b Aussage d impliziert. Für den Nachweis der Implikation d $\Rightarrow$ c definiere die Funktion $f(t) := r^2(t)$ für $t \geqslant 0$. Aus der Hölderschen Ungleichung und Lemma 2.6.c folgt $\dot{f} \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d})$. Da nach Voraussetzung $f \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d})$ gilt, folgt $f(t) \to 0$ für $t \to \infty$ und damit $r(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Aus Lemma 2.6.a folgt die Aussage c.
Es verbleibt der Nachweis der Implikation c $\Rightarrow$ b. Zunächst folgt $\det[\Delta_\nu(\lambda)] \neq 0$ für alle $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0$ nach Satz 2.4. Da nach Bemerkung 1.8.c die Nullstellen von $\det[\Delta_\nu(\cdot)]$ diskret in $\overline{\mathbb{C}}_c$ für jedes $c > \hat{\beta}_\nu$ liegen und $\hat{\beta}_\nu < 0$ ist, existiert ein $b \in (\hat{\beta}_\nu, 0)$, so dass $\det[\Delta_\nu(\lambda)] \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geqslant b$ gilt. Aus der Anwendung des Satzes 2.2 auf $\Lambda_\nu(b)$ folgt die Aussage b.
Die letzte Aussage ergibt sich unmittelbar für die Differential-Resolvente r. Für die Ableitung $\dot{r}$ erhält man mit der Konstanten $b \in (\hat{\beta}_\nu, 0)$ aus Aussage b für $t \geqslant 0$:

$$|\dot{r}(t)| \leqslant \int_{[-t,0]} |r(t+s)|\ |\nu|(ds) \leqslant Ce^{bt} \int_{(-\infty,0]} e^{bs}\ |\nu|(ds) = Ce^{bt} \left\|e(b)\, d|\nu|\right\|_{TV}$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Die Integrierbarkeitsaussagen folgen für eine beliebige Konstante $c \in (b,0)$. □

In [CL80] (Seite 845-848) wird die Frage aufgeworfen, ob gleichmäßige asymptotische Stabilität der Gleichung (1.1) von exponentieller Ordnung ist. Dies wird in [Mur91] für Gleichungen der Form (1.1) zu einem Maß der Form

$$\nu(du) = a\,\delta_0(du) + f(u)\,du, \quad f \in L^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R},$$

mit $\hat{\beta}_\nu < 0$ positiv beantwortet und in [App00] auf den mehrdimensionalen Fall übertragen. Aufgrund einer Formel der Konstanten ((1) in [Mur91]) ist für die asymptotische Stabilität von exponentieller Ordnung der Gleichung (1.1) ein exponentielles Abfallen der Differential-Resolvente des Maßes ν hinreichend. Deshalb und wegen Bemerkung 2.5 beinhaltet Satz 2.7 diese Resultate und lässt die Verallgemeinerung für beliebige Maße zu, dass die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente stets die gleichmäßige asymptotische Stabilität von exponentieller Ordnung der Gleichung (1.1) impliziert, falls $\hat{\beta}_\nu < 0$ erfüllt ist.
Für Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis der Form (1.3) fallen die Begriffe der gleichmäßigen asymptotischen Stabilität und exponentiellen asymptotischen Stabilität zusammen (Lemma 6.5.3 in [HVL93]). Dies trifft bei Volterra-Gleichungen nicht

mehr zu, falls die Voraussetzung $\hat{\beta}_\nu < 0$ in Satz 2.7 verletzt ist, wie wir an einem Beispiel zeigen werden. Zuvor bestimmen wir mittels eines Satzes von Shea und Wainger aus [SW75] die Konvergenzraten von Differential-Resolventen zu Maßen, deren α-tes Moment existiert:

$$M^\alpha(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d}) := \left\{ \nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d}) \, : \, \int_{\mathbb{R}_-} |u|^\alpha \, |\nu|(du) < \infty \right\}, \quad \alpha > 0.$$

Insbesondere sind die in Satz 2.7 betrachteten Maße ν mit $\hat{\beta}_\nu < 0$ für jedes $\alpha > 0$ in $M^\alpha(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ enthalten.

Satz 2.8
Es sei r die Differential-Resolvente eines Maßes $\nu \in M^\alpha(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ mit $\alpha > 0$. Falls $\det[\Delta_\nu(\lambda)] \neq 0$ für alle $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0$ gilt, so erhält man für $i = 0, 1$:

$$\left| r^{(i)}(t) \right| = o(t^{-\alpha}) \quad \text{für } t \to \infty \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \left| r^{(i)}(s) \right| s^\alpha \, ds < \infty$$

mit $r^{(0)} := r$ und $r^{(1)} := \dot{r}$.

Beweis: Folgt aus Satz 3 in [SW75]. □

Im folgenden Beispiel liegt gleichmäßige asymptotische Stabilität vor, jedoch fällt die Differential-Resolvente nicht exponentiell ab.

Beispiel 2.9 Definiere für $l > 1$ und $m > (l-1)^{-1}$ das Maß

$$\nu(du) := -m\,\delta_0(du) + (1-u)^{-l}\,du.$$

Für $\alpha \in (0, l-1)$ ist $\nu \in M^\alpha(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$. Aus Satz 1 in [BM83] folgt die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente r des Maßes ν und die gleichmäßige asymptotische Stabilität der Differentialgleichung (1.1). Die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente impliziert $\det[\Delta_\nu(\lambda)] \neq 0$ für $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0$ nach Satz 2.4 und man erhält aus Satz 2.8 eine Konvergenzrate der Differential-Resolvente. Andererseits gibt Lemma 2.2 aus [AR02] eine maximale Konvergenzrate an und man erhält zusammen:

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \, |r(t)| = 0 \quad \text{und} \quad \liminf_{t\to\infty} t^l \, |r(t)| > 0.$$

Aus der letzten Aussage ergibt sich, dass die Differential-Resolvente nicht exponentiell abfallen kann.

Mit Satz 2.8 lassen sich äquivalente Aussagen für die Integrierbarkeit und Konvergenzraten der Differential-Resolvente im folgenden Satz formulieren. Im Gegensatz zu Satz 2.7 werden auch Maße ν mit $\hat{\beta}_\nu = 0$ betrachtet, falls das erste Moment von ν existiert.

Satz 2.10
Für die Differential-Resolvente r eines Maßes $\nu \in M^\alpha(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ mit $\alpha \geqslant 1$ sind äquivalent:

a) *$\det[\Delta_\nu(\lambda)] \neq 0$ für alle $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_0$;*

b) $|r(t)| = o(t^{-\alpha})$ *für* $t \to \infty$*;*

c) $r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d \times d})$*;*

d) $r \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d \times d})$.

In diesem Fall gilt für $i = 0, 1$*:*

$$\left|r^{(i)}(t)\right| = o(t^{-\alpha}) \text{ für } t \to \infty \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \left|r^{(i)}(s)\right| s^\alpha \, ds < \infty$$

mit $r^{(0)} := r$ *und* $r^{(1)} := \dot{r}$.

Beweis: Aus Aussage b folgt Aussage c wegen Lemma 2.6.a. Umgekehrt impliziert Aussage c nach Satz 2.4, dass die charakteristische Funktion $\det [\Delta_\nu(\cdot)]$ keine Nullstellen in der Halbebene $\overline{\mathbb{C}}_0$ besitzt, und Aussage b folgt aus Satz 2.8. Die restlichen Äquivalenzen lassen sich analog wie in Satz 2.7 begründen. Die letzte Aussage folgt aus Satz 2.8. □

Kapitel 4

Stochastische Differentialgleichungen

Ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat kann in Satz 1.5 für nicht-lineare stochastische Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis formuliert werden. Im anschließenden Abschnitt 4.2 wird eine Darstellung der Lösung von affinen stochastischen Differentialgleichungen präsentiert. Basierend auf den Ergebnissen des Kapitels 3 über die Differential-Resolvente wird im letzten Abschnitt 4.3 die Existenz einer stationären Lösung von affinen stochastischen Gleichung mit unendlichem Gedächtnis untersucht. In Satz 3.4 werden hierfür hinreichende Bedingungen formuliert und eine Darstellung der stationären Lösung gegeben. Unter etwas schärferen Voraussetzungen können in Korollar 3.10 äquivalente Aussagen zu der Existenz einer stationären Lösung hergeleitet werden. Wir beeenden das Kapitel mit einem Beispiel, das ein für affine stochastische Gleichungen mit endlichem Gedächtnis unbekanntes Phänomen vorstellt: jede Lösung einer affinen stochastischen Gleichung mit unendlichem Gedächtnis konvergiert in Verteilung, jedoch existiert keine stationäre Lösung dieser Gleichung.

1 Allgemeine Gleichungen

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen lineare Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis der Form (2.1.1), die durch einen Wiener-Prozess gestört werden und deren Anfangsbedingungen zufällige Funktionen sind. Den in Kapitel 2 vorgestellten Zugang der abstrakt beschriebenen Phasenräume erachten wir auch in der stochastischen Situation als fundamental zur Behandlung von Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis. Denn bei der Wahl des Raumes der Anfangsbedingungen ergeben sich dieselben Probleme, die in Kapitel 2.1 für deterministische Differentialgleichungen beschrieben sind. Ebenso überträgt sich der Vorteil der besseren Adaption der Differentialgleichung an das betrachtete Modell auf die stochastische Situation.
Der abstrakte Zugang bietet sich nicht nur für die Behandlung von linearen, sondern

auch von allgemeinen *stochastischen funktionalen Itô-Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis* an. In diesem Abschnitt wird die Beschreibung einer stochastischen funktionalen Differentialgleichung mittels des axiomatischen Zuganges vorgestellt und ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz formuliert. Dadurch ist auch ein natürlicher Rahmen geschaffen, in dem die später betrachteten affinen Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis enthalten sind. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Behandlung von stochastischen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis durch einen Funktionenraum, der durch ähnliche abstrakte Bedingungen beschrieben ist wie hier, bereits in [Tud87] vorgestellt wird. Unseres Wissens ist dies die einzige Arbeit in einem vergleichbaren Zusammenhang, die jedoch eine andere Zielsetzung verfolgt.
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ sei $W := \{W(t), \mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ ein Standard-Wiener-Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^{d'}$, $d' \in \mathbb{N}$. Die Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ erfülle die üblichen Bedingungen nach Definition 2.25 in [KS91]. Des Weiteren sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ mit einer Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ gemäß Definition 2.2.2 ein Phasenraum. In $\mathcal{B}$ wird die Borel-σ-Algebra bezüglich der Topologie angenommen, die von der Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ gemäß Anhang A erzeugt wird. Analog ist über $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra bezüglich der Produkttopologie vorausgesetzt. Betrachtet wird die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} dX(t) &= F(t, X_t)\, dt + G(t, X_t)\, dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ X_0 &= \Phi\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Die Funktionale sind vorausgesetzt als:

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^d \quad \text{messbar,} \tag{1.2}$$

$$G : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^{d\times d'} \quad \text{messbar.} \tag{1.3}$$

Der Anfangsprozess $\Phi := \{\Phi(u) : u \leqslant 0\}$ ist eine $\mathcal{F}_0$-messbare, $\mathcal{B}$-wertige Zufallsvariable. Verkürzend benutzen wir die Notation $\Phi \in \mathcal{B}$.
Der Begriff einer (starken) Lösung der Gleichung (1.1) wird in der folgenden Definition festgehalten, die sich nach Definition 5.2.1 in [Mao97] richtet.

Definition 1.1
Ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ heißt Lösung der Gleichung (1.1) *zu der Anfangsbedingung Φ, falls er folgende Eigenschaften besitzt:*

a) *X ist P-f.s. auf $\mathbb{R}_+$ stetig und $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ ist $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- adaptiert für alle $t \geqslant 0$;*

b) $P\left(\int_0^t (|F(s, X_s)| + |G(s, X_s)|^2)\, ds < \infty\right) = 1$ *für alle $t \geqslant 0$;*

c) $X_0 = \Phi$ *und*

$$X(t) = \Phi(0) + \int_0^t F(s, X_s)\, ds + \int_0^t G(s, X_s)\, dW(s) \quad \text{für alle } t \geqslant 0 \ P\text{-f.s.}$$

Die Definition 1.1 ist unabhängig von dem Phasenraum $\mathcal{B}$ formuliert. Da aber jede Lösung X der Gleichung (1.1) eine Funktion $\Phi \in \mathcal{B}$ P-f.s. stetig fortsetzt, ist X P-f.s. eine zulässige Funktion für den Phasenraum $\mathcal{B}$. Nach Bedingung A.a besitzt das Segment $X_t = \{X(t+u) : u \leqslant 0\}$ für jedes $t \geqslant 0$ P-f.s Pfade im Phasenraum $\mathcal{B}$.
Eine Lösung X der Gleichung (1.1) zu einer Anfangsbedingung Φ wird *eindeutig* genannt, falls diese von jeder anderen Lösung X' zu der Anfangsbedingung Φ ununterscheidbar ist, das heißt

$$P\left(X(t) = X'(t) \quad \text{für alle } t \geqslant 0\right) = 1.$$

Da für $\alpha \geqslant 0$ der Raum $C([-\alpha, 0], \mathbb{R}^d)$ als ein Phasenraum nach Beispiel 2.3.2 verstanden werden kann, werden durch Gleichungen der Form (1.1) auch stochastische Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis beschrieben, wie sie in [Moh84] und [Mao97] behandelt werden.
Durch Gleichungen der Form (1.1) können auch *stochastische Volterra-Itô-Differentialgleichungen* modelliert werden. Dies sind Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\int_0^t f(s,t,X(s))\,ds\right) dt + \left(\int_0^t h(s,t,X(s))ds\right) dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ X(0) &= Y, \end{aligned}$$

wobei die Funktionale gegeben sind durch

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d'}$$

und die Anfangsbedingung Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}^d$ ist. Stochastische Volterra-Gleichungen, auch von allgemeinerer Gestalt als hier vorgestellt, werden in [BM80] behandelt. In [AR02] werden asymptotische Eigenschaften der Lösungen von linearen stochastischen Volterra-Gleichungen vorgestellt.
Gleichungen der Form (1.1) mit zeitlich homogenen Funktionalen F und G werden erstmalig in [IN64] behandelt. Die Funktionale F und G werden auf dem Raum $C(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ definiert und als stetig in der Topologie der kompakten Konvergenz vorausgesetzt. Da dieser Topologie keine Norm entspricht, lässt sich dieser Zugang nicht unmittelbar in unseren Rahmen einbetten. Jedoch wird in der Arbeit [Kat95] das Konzept des semi-normierten Phasenraumes in naheliegender Weise auf semi-metrische Phasenräume übertragen. Ebenso wird dort der Raum der stetigen Funktionen mit der Topologie der kompakten Konvergenz als ein metrischer Phasenraum nachgewiesen. Mit dieser Verallgemeinerung des Phasenraumes können die Gleichungen, die in [IN64] betrachtet werden, in dem hier vorgestellten Rahmen behandelt werden. Die bereits in [IN64] behandelte Frage nach der Existenz stationärer Lösungen wird in der Arbeit [Bak02] fortgesetzt.
Auf einem konkreten Beispiel eines Phasenraumes, ähnlich dem in Beispiel 2.2.6 eingeführten Raum $(\mathbb{R}^d \times L^p_g)(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$, werden in der Arbeit [MT84] Markov- und Stabilitätseigenschaften der Gleichung (1.1) vorgestellt.

Die folgenden Aussagen über die Existenz sowie die Abschätzung der Momente einer Lösung der Gleichung (1.1) sind ähnlich zu den Sätzen bezüglich stochastischer Differentialgleichungen ohne Gedächtnis, Satz 5.2.9 in [KS91], oder mit endlichem Gedächtnis, Satz 5.2.2 in [Mao97]. Bei den Nachweisen dieser Sätze wird nur auf die Besonderheiten des axiomatisch beschriebenen Phasenraumes eingegangen und ansonsten auf die Literatur verwiesen. Eine andere Argumentation erfordert die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von X_t für $t \geqslant 0$ einer Lösung X der Gleichung (1.1) bei einem axiomatisch beschriebenen Phasenraum, die in den folgenden Lemmata zunächst behandelt wird.

Lemma 1.2
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei $Z := \{Z(u) : u \leqslant 0\}$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Falls Z P-f.s. stetig mit $\operatorname{supp} Z \subseteq [T, 0]$ *für ein $T < 0$ ist, so ist Z für jeden beliebigen Phasenraum $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{B}$-wertige Zufallsvariable.*

Beweis: Definiere $t_0 := 0$ sowie $t_k := t_{k,n} := k\frac{T}{n+1}$ für $k = 1, \ldots n$ und $n \in \mathbb{N}$. Die stetigen Funktionen, die für $k = 1, \ldots, n$ auf $[t_k, t_{k-1}]$ linear und auf $[T, t_n]$ identisch 0 sind, werden in dem folgenden linearen Raum zusammengefasst:

$$A_n := \Bigg\{ f \in C([T,0], \mathbb{R}^d) : \\ f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [T, t_n], \\ -\frac{n+1}{T} y_{n-1} x + y_{n-1} n & , x \in (t_n, t_{n-1}], \\ \frac{n+1}{T}(y_k - y_{k-1})x + y_{k-1}k - y_k(k-1) & , x \in (t_k, t_{k-1}], \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{für } y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}^d \\ k = 1, \ldots, n-1 \end{matrix} \Bigg\}.$$

Wegen $A_n \subseteq C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ gilt $A_n \subseteq \mathcal{B}$ für jeden Phasenraum $\mathcal{B}$. Die Abbildung

$$\tau : \mathbb{R}^{nd} \to A_n, \quad \tau((y_0, \ldots, y_{n-1})^T) := f \text{ mit } f(t_k) = y_k \in \mathbb{R}^d \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1,$$

ist wohldefiniert. Bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{C_c}$ auf A_n ist die Abbildung τ stetig und wegen Lemma 2.2.3 auch stetig bezüglich der Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ eines beliebigen Phasenraumes $\mathcal{B}$.
Für P-fast jedes $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ lässt sich $Z(\cdot, \omega)$ pfadweise durch $Z^n(\cdot, \omega) \in A_n$ mit $Z^n(t_{k,n}, \omega) := Z(t_{k,n}, \omega)$ für $k = 0, \ldots, n-1$ approximieren:

$$\|Z(\cdot, \omega) - Z^n(\cdot, \omega)\|_{\mathcal{B}} \leqslant C_T \|Z(\cdot, \omega) - Z^n(\cdot, \omega)\|_{C_c} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty, \tag{1.4}$$

mit einer Konstanten $C_T > 0$, die sich aus Lemma 2.2.3 ergibt. Aufgrund der Messbarkeit der $Z(u)$ für jedes $u \in [-T, 0]$ ist $(Z^n(t_{k,n}))_{k=0}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar und wegen der Stetigkeit der Abbildung τ ist Z^n eine $\mathcal{B}$-wertige Zufallsvariable. Mit (1.4) ist auch Z eine messbare $\mathcal{B}$-wertige Zufallsvariable. □

Das folgende Lemma ermöglicht den Nachweis der geforderten Messbarkeit in Definition 1.1.a. Darüber hinaus erlaubt es, den Satz von Fubini auf iterierte Integrale der Form $\mathbb{E} \int_0^t \|X_s\|_{\mathcal{B}} \, ds$ anzuwenden, wobei $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ die Lösung der Gleichung (1.1) bezeichnet. Dies erfordert für jedes $t \geqslant 0$ die Produktmessbarkeit der Abbildung:

$$\Omega \times [0, t] \to \mathcal{B}, \quad (\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$$

bezüglich $\mathcal{F} \otimes \sigma_{[0,t]}$. Die Messbarkeit sogar bezüglich $\mathcal{F}_t \otimes \sigma_{[0,t]}$ für $t \geqslant 0$ – der so genannten *progressiven Messbarkeit bezüglich der Filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ – garantiert das folgende Lemma.

Lemma 1.3
Es sei $\mathcal{B}$ ein Phasenraum und $\{Z(t) : t \leqslant T\}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ für $T > 0$. Falls

$$Z_0 = \{Z(u) : u \leqslant 0\} \text{ eine } \mathcal{F}_0\text{-messbare } \mathcal{B}\text{-wertige Zufallsvariable ist,}$$
$$\{Z(t) : t \in [0,T]\} \text{ } P\text{-f.s. stetig ist und } Z(t) \text{ } \mathcal{F}_t\text{-messbar für jedes } t \in [0,T] \text{ ist,}$$

dann ist $\{Z_t : t \in [0,T]\}$ bezüglich $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ progressiv messbar.

Beweis: Für $t \leqslant T$ definiere

$$\widetilde{Z}(t) := \begin{cases} Z(t) - Z(0) & , t \in [0,T], \\ 0 & , t \leqslant 0. \end{cases}$$

Es ist $Z_t = \widetilde{Z}_t + S(t)Z_0$ für $t \in [0,T]$, wobei $S(t)$ die Lösungsoperatoren (2.3.11) der trivialen Gleichung bezeichnen. Lemma 1.2 impliziert die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von $\widetilde{Z}_t$ für $t \in [0,T]$ und zusammen mit der $\mathcal{F}_0$-Messbarkeit von $S(t)Z_0$, die sich aus der Stetigkeit von $S(t) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ für $t \in [0,T]$ ergibt, folgt die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von Z_t.
Wegen der Bedingung A.d an den Phasenraum ist die Abbildung $s \mapsto Z_s$ für $s \in [0,T]$ stetig und die Messbarkeit von $(\omega, s) \mapsto Z_s(\omega)$ für $s \in [0,t]$ bezüglich $\mathcal{F}_t \otimes \sigma_{[0,t]}$ und einem beliebigen $t \in [0,T]$ folgt wie in Proposition 1.1.13 in [KS91]. □

Die Abschätzung der Momente einer Lösung X von (1.1) erfolgt mit den Funktionen M und N sowie der Konstanten H der Bedingung A an einen Phasenraum $\mathcal{B}$.

Satz 1.4
Es sei $\mathcal{B}$ ein Phasenraum und es existiere eine Konstante $K \geqslant 0$, so dass die Funktionale F und G folgender Bedingung für $T \geqslant 0$ genügen:

$$|F(t,\varphi)|^2 + |G(t,\varphi)|^2 \leqslant K(1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}^2) \quad \text{für alle } t \in [0,T] \text{ und } \varphi \in \mathcal{B}. \tag{1.5}$$

Ist $X = X(\cdot, \Phi)$ eine Lösung der Gleichung (1.1) zu einer Anfangsbedingung $\Phi \in \mathcal{B}$ mit $\mathbb{E}\,\|\Phi\|_{\mathcal{B}}^2 < \infty$, so gilt:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|^2\right) \leqslant C_T \exp\left(6K\,\|M\|_{C[0,T]}^2\, T(T+4)\right)$$

$$\text{und} \quad \mathbb{E}\left(\|X_T\|_{\mathcal{B}}^2\right) \leqslant 2(N(T))^2\,\mathbb{E}\,\|\Phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 2(M(T))^2 C_T \exp\left(6K\,\|M\|_{C[0,T]}^2\, T(T+4)\right),$$

mit $C_T := 3KT(T+4) + (3H^2 + 6KT(T+4)\,\|N\|_{B[0,T]}^2)\,\mathbb{E}\,\|\Phi\|_{\mathcal{B}}^2$.

Beweis: Bis auf mehrmalige Anwendung der Bedingung A.c an den Phasenraum $\mathcal{B}$ erfolgt der Beweis analog zu Lemma 5.2.3 in [Mao97] für Gleichungen mit endlichem Gedächtnis, auf den für Details verwiesen wird. Definiere für $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau_n := T \wedge \inf\{t \in [0,T] : |X(t)| \geqslant n\}$$

und $X^n(t) := X(t \wedge \tau_n)$ für $t \in \mathbb{R}$. Wegen der Bedingung A.a besitzt X_t^n für jedes $t \geqslant 0$ P-f.s. Pfade in $\mathcal{B}$. Man erhält mit der Doobschen L^2-Ungleichung (Satz 1.3.8 in [Mao97]) und der Bedingung A.c für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,t]} |X^n(s)|^2\right) &\leqslant 3(\mathbb{E}\,|\Phi(0)|^2 + K(T+4)\int_0^t (1 + \mathbb{E}\,\|X_u^n\|_{\mathcal{B}}^2)\,du) \\ &\leqslant C_T + 6K\,\|M\|_{C[0,T]}^2\,(T+4)\int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{\xi\in[0,u]} |X^n(\xi)|^2\right) du.\end{aligned}$$

Aus einer Anwendung des Lemmas von Gronwall (Satz 1.8.1 in [Mao97]) und durch eine Grenzbetrachtung $n \to \infty$ folgt die erste Ungleichung. Die zweite Ungleichung ist eine Konsequenz der Bedingung A.c und der ersten Ungleichung. □

Satz 1.5
Es sei $\mathcal{B}$ ein Phasenraum und es existiere für alle $T \geqslant 0$ eine Konstante $K_T \geqslant 0$, so dass die Funktionale F und G folgenden Bedingungen für alle $t \in [0,T]$ genügen:

$$|F(t,\varphi) - F(t,\psi)|^2 + |G(t,\varphi) - G(t,\psi)|^2 \leqslant K_T\,\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}}^2 \quad \textit{für alle } \varphi,\psi \in \mathcal{B}, \tag{1.6}$$

$$|F(t,\varphi)|^2 + |G(t,\varphi)|^2 \leqslant K_T(1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}^2) \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{B}\,. \tag{1.7}$$

Dann existiert für jede Anfangsbedingung $\Phi \in \mathcal{B}$ mit $\mathbb{E}\,\|\Phi\|_{\mathcal{B}}^2 < \infty$ eine eindeutige Lösung $X(\cdot,\Phi)$ der Gleichung (1.1).

Beweis: Der Beweis erfolgt mit den üblichen Methoden, etwa wie in Satz 5.2.2 in [Mao97]. Lediglich die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ wird durch Bedingung A.c weiter abgeschätzt, um eine Anwendung des Lemmas von Gronwall zu ermöglichen. Die Messbarkeit wird durch Lemma 1.3 begründet. Nur auf diese Besonderheiten gehen wir ein und verweisen ansonsten auf die Literatur.
Für den Nachweis der Eindeutigkeit seien X^1 und X^2 zwei Lösungen der Gleichung (1.1) zu der Anfangsbedingung Φ. Wie im Beweis zu Satz 1.4 erhält man mit (1.6):

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,t]} \left|X^1(s) - X^2(s)\right|^2\right) \\ &\qquad \leqslant 2K_T(T+4)\,\|M\|_{C[0,T]}^2 \int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{\xi\in[0,u]} \left|X^1(\xi) - X^2(\xi)\right|^2\right) du \quad \text{für } t \in [0,T].\end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall impliziert $X^1(t) = X^2(t)$ für alle $t \in [0,T]$ P-f.s.
Der Nachweis der Existenz wird mit dem Picardschen Iterationsverfahren geführt. Es sei für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0,T]$:

$$X_0^0 := \Phi, \quad X^0(t) := \Phi(0)$$
$$X_0^n := \Phi, \quad X^n(t) := \Phi(0) + \int_0^t F(s, X_s^{n-1})\,ds + \int_0^t G(s, X_s^{n-1})\,dW(s).$$

Aus Lemma 1.3 folgt induktiv, dass X_t^n eine $\mathcal{F}_t$-messbare, $\mathcal{B}$-wertige Zufallsvariable für $t \in [0,T]$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist.
Mit der Doobschen L^2-Ungleichung und der Bedingung A.c an den Phasenraum $\mathcal{B}$ erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X^n(t)|^2\right) &\leqslant 3\,\mathbb{E}\,|\Phi(0)|^2 + 3K_T(T+4)\int_0^T \left(1 + \mathbb{E}\left\|X_s^{n-1}\right\|_{\mathcal{B}}^2\right) ds \\ &\leqslant 3\left(\mathbb{E}\,|\Phi(0)|^2 + K_T T(T+4)\left(1 + 2\,\|N\|_{B[0,T]}^2\,\mathbb{E}\,\|\Phi\|_{\mathcal{B}}^2\right)\right) \\ &\quad + 6\,\|M\|_{C[0,T]}^2\,K_T(T+4)\int_0^T \mathbb{E}\left(\sup_{u\in[0,s]} \left|X^{n-1}(u)\right|^2\right) ds.\end{aligned}$$

Durch Induktion folgt die Existenz des Erwartungswertes auf der linken Seite. Analog zeigt man induktiv mit Bedingung A.c die Existenz von Konstanten $C_T, D_T > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,t]} \left|X^{n+1}(s) - X^n(s)\right|^2\right) \leqslant \tfrac{1}{n!} C_T (D_T t)^n \quad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Der Beweis kann analog wie für Satz 2.3.1 in [Mao97] zu Ende geführt werden. □

Weitere Verfeinerungen der Existenzaussage durch Abschwächung der Voraussetzung, wie etwa durch eine nur lokale Lipschitz-Bedingung, sind möglich. Des Weiteren kann in diesem Rahmen des abstrakt beschriebenen Phasenraumes die weitere Theorie von Stabilitätsaussagen, approximierenden Lösungen und andere Themen behandelt werden, wie in Kapitel 5 in [Mao97] für Gleichungen mit endlichem Gedächtnis ausgeführt.

2 Affine Gleichungen

2.1 Die affine stochastische Gleichung pfadweise

Diese Arbeit konzentriert sich auf *affine stochastische Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis*. Dies sind spezielle Gleichungen der Form (1.1) mit einem linearen, autonomen Driftfunktional $F = L$ und der konstanten Diffusionsmatrix $G = \mathrm{I}_d$ mit $d = d'$.

Zu einem gegebenen Phasenraum $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ erhält man:

$$\begin{aligned} dX(t) &= L(X_t)\,dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ X_0 &= \Phi, \end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ ein lineares, stetiges Funktional ist. Der Anfangsprozess $\Phi = \{\Phi(u) : u \leqslant 0\}$ ist eine $\mathcal{F}_0$-messbare, $\mathcal{B}$-wertige Zufallsvariable und W ein d-dimensionaler Standard-Wiener-Prozess.
Definition 1.1 fordert von einer Lösung $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ der Gleichung (2.8) P-f.s.:

$$X(t) = \Phi(0) + \int_0^t L(X_s)\,ds + W(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \quad X_0 = \Phi\,.$$

Da kein stochastisches Integral in der Gleichung involviert ist, kann diese pfadweise betrachtet werden. Dies resultiert in der Behandlung der folgenden deterministischen Gleichung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(0) + \int_0^t L(x_s)\,ds + h(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x_0 &= \varphi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

mit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ und $\varphi \in \mathcal{B}$ sowie $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^d)$ mit $h(0) = 0$. Für spätere Referenzen ist der Raum $\mathbb{R}^d$ durch $\mathbb{K}^d$, das entweder für $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$ stehen kann, ersetzt worden.

Definition 2.1
Eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^d$ heißt Lösung der Gleichung (2.9) *zu der Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$, falls $x_t \in \mathcal{B}$ für jedes $t \geqslant 0$ gilt und x stetig auf $[0, \infty)$ ist sowie der Gleichung (2.9) für alle $t \geqslant 0$ und $x_0 = \varphi$ genügt.*
Eine Lösung x der Gleichung (2.9) zu einer Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$ heißt eindeutig, *falls für jede andere Lösung y der Gleichung (2.9) zu der Anfangsbedingung φ die Gleichheit $x(s) = y(s)$ für $s \in \mathbb{R}$ gilt.*

Nach Satz 2.3.3 existiert eine eindeutige Lösung der zu Gleichung (2.9) korrespondierenden homogenen Gleichung:

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \quad x_0 = \varphi. \tag{2.10}$$

Für den Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ existiert nach Satz 2.3.1 ein eindeutiges Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$, so dass gilt:

$$L\psi = \int_{(-\infty,0]} \nu(du)\,\psi(u) \quad \text{für alle } \psi \in C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d). \tag{2.11}$$

Durch das Maß ν wird die folgende Volterrasche Gleichung beschrieben:

$$\dot{r}(t) = \int_{[-t,0]} \nu(du)\,r(t+u) \quad \text{für } t \geqslant 0, \quad r(0) = \mathrm{I}_d, \tag{2.12}$$

deren eindeutige Lösung Differential-Resolvente des Maßes ν genannt wird, siehe Satz 3.1.1. Den Gleichungen (2.8) oder (2.9) werden im Rest dieser Arbeit stets die Gleichungen (2.10) bis (2.12) und die dazugehörigen Begriffen zugeordnet. Die Lösung der Gleichung (2.8) lässt sich durch die Lösungen der Gleichungen (2.10) und (2.12) angeben, wozu im folgenden Abschnitt ein Riemann-Stieltjes- oder Lebesgue-Stieltjes-Integral definiert wird.

2.2 Riemann-Stieltjessches Integral

Zur Darstellung der Lösung wird sich ein Riemann-Stieltjes-Integral als ausreichend erweisen, weshalb wir auch keinen allgemeineren von einem Maß abhängigen Integralbegriff einführen.

Definition 2.2

a) *Eine Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{K}^{k\times i}$, k, $i \in \mathbb{N}$, *heißt von* beschränkter Variation auf dem Intervall $[a,b]$, *falls gilt:*

$$TV[f,[a,b]] := \sup\left\{\sum_{l=1}^{n} |f(t_l) - f(t_{l-1})| : a = t_0 < \cdots < t_n = b, \;\; n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

In diesem Fall heißt $TV[f,[a,b]]$ *die* totale Variation *von* f *auf* $[a,b]$.

b) *Für ein Intervall* $[a,b]$ *und* k, $i \in \mathbb{N}$ *bezeichne:*

$$BV([a,b],\mathbb{K}^{k\times i}) := \left\{f : [a,b] \to \mathbb{K}^{k\times i} : f \text{ von beschränkter Variation auf } [a,b]\right\},$$
$$\|f\|_{BV[a,b]} := \|f\|_{BV} := |f(a)| + TV[f,[a,b]]\,.$$

c) *Für* k, $i \in \mathbb{N}$ *und* $b \in \mathbb{R}$ *bezeichne:*

$$BV_{loc}((-\infty,b],\mathbb{K}^{k\times i}) := \Big\{f : (-\infty,b] \to \mathbb{K}^{k\times i} : f|_K \in BV(K,\mathbb{K}^{k\times i}) \text{ für alle kompakten Mengen } K \subseteq (-\infty,b]\Big\}.$$

d) *Eine Funktion* $f \in BV([a,b],\mathbb{K}^{k\times i})$ *für* k, $i \in \mathbb{N}$ *heißt* normalisiert, *falls* f *linksstetig ist und* $f(b) = 0$ *gilt.*

Definition 2.3

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ *und* k, $i \in \mathbb{N}$.

a) *Für* $f \in BV([a,b],\mathbb{K}^{k\times i})$ *und* $g \in C([a,b],\mathbb{K}^{i})$ *definiere*

$$\int_{[a,b]} f(s)\,dg(s) := -\int_{[a,b]} df(s)\,g(s) + f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

wobei das Integral auf der rechten Seite als ein Riemann-Stieltjes-Integral zu verstehen ist.

b) *Es seien* $f \in BV_{loc}((-\infty, b], \mathbb{K}^{k\times i})$, $g \in C((-\infty, b], \mathbb{K}^i)$ *mit* $\lim_{T\to\infty} f(-T)g(-T) = 0$. *Definiere*
$$\int_{(-\infty,b]} f(s)\,dg(s) := \lim_{T\to\infty} \int_{[-T,b]} f(s)\,dg(s),$$
falls auf der rechten Seite der Limes existiert.

Falls die Funktion $f \in BV([a, b], \mathbb{K}^{k\times i})$ absolutstetig ist, also eine Ableitung f' (Lebesgue) fast überall besitzt, so gilt
$$\int_{[a,b]} f(s)\,dg(s) = -\int_{[a,b]} f'(s)g(s)\,ds + f(b)g(b) - f(a)g(a), \tag{2.13}$$
wobei das Integral der rechten Seite als Lebesgue-Integral zu verstehen ist.

2.3 Affine deterministische Gleichung

Sowohl für den Nachweis der Existenz einer Lösung der Gleichung (2.8) als auch im weiteren Verlauf der Arbeit findet eine Folgerung aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes Anwendung:

Lemma 2.4
Es bezeichne $\tau : G_0 \to \mathbb{R}^2$ *die Funktion* $\tau(s, u) := (s + u, u)$ *für* $G_0 \in \sigma_{\mathbb{R}^2}$. *Für eine Funktion* $f : G_1 \to \mathbb{R}^d$ *mit* $\int_{G_0} |f(s + u, s)|\,|\nu|(du)\,ds < \infty$ *für* $G_1 := \tau(G_0)$ *und* $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^{d\times d})$ *gilt:*
$$\int_{G_0} \mu_0(ds, du)\, f(s + u, u) = \int_{G_1} \mu_0(dx, dy)\, f(x, y),$$
wobei $\mu_0(ds, du) := (ds \otimes \nu_{kl}(du))_{k,l=1}^d$ *für* $\nu = (\nu_{kl})_{k,l=1}^d$.

Beweis: Folgt aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes. □

Der folgende Satz garantiert die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung x der Gleichung (2.9). Er gibt eine Darstellung der Vergangenheit x_t der Lösung für $t \geqslant 0$ an, deren Evaluation in 0 die Lösung $x(t)$ ergibt.

Satz 2.5
Das Funktional $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ *werde durch das Maß* $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ *gemäß* (2.11) *auf* $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ *dargestellt und* r *sei die Differential-Resolvente von* ν. *Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung* $\varphi \in \mathcal{B}$ *eine eindeutige Lösung* $x = x(\cdot, \varphi, h)$ *der Gleichung* (2.9). *Diese besitzt für* $t \geqslant 0$ *die Darstellung:*
$$x_t(u) = \begin{cases} (T(t)\varphi)(u) + \displaystyle\int_0^{t+u} r(t - s + u)\,dh(s) & , u \in [-t, 0], \\ \varphi(t + u) & , u \leqslant -t, \end{cases} \tag{2.14}$$
wobei $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *die Lösungshalbgruppe der homogenen Gleichung* (2.10) *bezeichnet.*

Beweis: Die Familie $\{x_t\}_{t\geqslant 0}$ entspricht einer Funktion auf $\mathbb{R}$, da für $t \geqslant 0$ und $u \leqslant 0$ gilt:

$$x_t(u) = x(t+u) = \begin{cases} \varphi(t+u) & , t+u \leqslant 0, \\ x_{t+u}(0) & , t+u \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Für $t \geqslant 0$ wird die Funktion x_t in (2.15) dargestellt als $x_t = T(t)\varphi + z_t$ mit

$$z_t(u) := \begin{cases} \int_0^{t+u} r(t-s+u)\,dh(s) & , u \in [-t,0], \\ 0 & , u \leqslant -t. \end{cases}$$

Die Funktionen z_t sind für $t \geqslant 0$ wohldefiniert, weil nach Satz 3.1.1 die Differential-Resolvente r lokal absolutstetig ist. Da für $t \geqslant 0$ die Funktionen z_t stetig sind und kompakte Träger besitzen, folgt $x_t \in \mathcal{B}$ für jedes $\varphi \in \mathcal{B}$. Die Stetigkeit von x auf $\mathbb{R}_+$ folgt wegen (2.15) aus der Stetigkeit der Abbildungen $t \mapsto (T(t)\varphi)(0)$ und $t \mapsto z_t(0)$ für jedes $t \geqslant 0$.
Die Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (2.9) folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung der homogenen Gleichung (2.10) nach Satz 2.3.3 und der Linearität des Operators L.
Unter Ausnutzung der Integraldarstellung von L auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ gemäß (2.11), der partiellen Integration (2.13) und Lemma 2.4 erhält man für $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
x(t) - \varphi(0) - h(t) - \int_0^t Lx_s\,ds \\
&= (T(t)\varphi)(0) + \int_0^t \dot{r}(t-s)h(s)\,ds - \varphi(0) - \int_0^t L(T(s)\varphi)\,ds - \int_0^t L(z_s)\,ds \\
&= \int_0^t \dot{r}(t-s)h(s)\,ds - \int_0^t \left(\int_{[-s,0]} \nu(du)\,h(s+u) \right) ds \\
&\quad - \int_0^t \left(\int_{[-s,0]} \nu(du) \left(\int_0^{s+u} \dot{r}(s-v+u)h(v)\,dv \right) \right) ds \\
&= \int_0^t \dot{r}(t-s)h(s)\,ds - \int_0^t \nu([s-t,0])h(s)\,ds \\
&\quad - \int_0^t \left(\int_{[v-t,0]} \nu(du) \left(\int_{v-u}^t \dot{r}(s-v+u)\,ds \right) \right) h(v)\,dv \\
&= \int_0^t \dot{r}(t-s)h(s)\,ds - \int_0^t \nu([s-t,0])h(s)\,ds \\
&\quad - \int_0^t \left(\int_{[v-t,0]} \nu(du)\,(r(t-v+u) - \mathrm{I}_d) \right) h(v)\,dv \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

2.4 Affine stochastische Gleichung

Wegen der pfadweisen Betrachtungsweise der stochastischen Gleichung (2.8) folgt die Darstellung der Lösung dieser Gleichung aus 2.5 und man erhält:

Korollar 2.6
Für einen Phasenraum $\mathcal{B}$ und eine $\mathcal{F}_0$-messbare $\mathcal{B}$-wertige Anfangsbedingung Φ existiert eine eindeutige Lösung $X = X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung (2.8) und es gilt P-f.s. für alle $t \geqslant 0$:

$$X_t(u) = \begin{cases} (T(t)\,\Phi)(u) + \int_0^{t+u} r(t-s+u)\,dW(s) & , u \in [-t, 0], \\ \Phi(t+u) & , u \leqslant -t. \end{cases} \tag{2.16}$$

Beweis: Wegen der Darstellung (2.16) ist der $\mathbb{R}^d$-wertige Prozess $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ auf $\mathbb{R}_+$ P-f.s. stetig und $X(t)$ ist $\mathcal{F}_t$-messbar für $t \geqslant 0$. Aus Lemma 1.3 folgt die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von X_t für $t \geqslant 0$. Satz 2.5 begründet die restlichen Eigenschaften einer Lösung gemäß Definition 1.1 der stochastischen Differentialgleichung (2.8). □

Das Integral in der Darstellung (2.16) wird **pfadweise** als das Riemann-Stieltjes-Integral, das in Abschnitt 2.2 eingeführt wird, verstanden. Da der Integrand r eine deterministische Funktion ist, stimmt dieses Integral mit dem stochastischen Itô-Integral P-f.s. überein (Problem 3.12 in [KS91]).
Im Gegensatz zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz 1.4 wird in Korollar 2.6 nicht die Existenz von Momenten der Anfangsbedingung Φ gefordert.
Da in Satz 2.5 nur eine stetige Funktion h mit $h(0) = 0$ vorausgesetzt ist, lässt sich Korollar 2.6 für Gleichungen (2.8) formulieren, in denen der Wiener-Prozess durch einen beliebigen, stetigen Prozess ersetzt ist, wie zum Beispiel eine fraktionale Brownsche Bewegung.

Endliches Gedächtnis 2.7 Eine affine stochastische Differentialgleichung mit endlichem Gedächtnis der Länge $\alpha \geqslant 0$ ist von der Form:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\int_{[-\alpha,0]} \nu(ds)\, X(t+s) \right) dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ X(u) &= \Phi(u), \quad u \in [-\alpha, 0], \end{aligned} \tag{2.17}$$

für eine $C([-\alpha, 0], \mathbb{R}^d)$-wertige Anfangsbedingung Φ. Die in Beispiel 2.3.2 beschriebenen Vorteile, den Raum der stetigen Funktionen durch einen abstrakt beschriebenen Phasenraum zu ersetzen, übertragen sich auf die stochastische Differentialgleichung (2.17).
Analog zu der stochastischen Gleichung (2.8) kann der Wiener-Prozess W ersetzt werden durch eine stetige Funktion h. Im Weiteren beziehen wir uns auf Gleichung (2.17) sowohl als ein Beispiel einer deterministischen wie auch einer stochastischen affinen Gleichung mit endlichem Gedächtnis.

3 Stationarität

Eine sich anschließende Frage ist, unter welchen Voraussetzungen die stochastische Gleichung (2.8) eine stationäre Lösung besitzt. Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ wird *stationär* genannt, falls dessen endlich-dimensionale Verteilungen translationsinvariant sind:

$$P\left(X(t_1 + h) \in A_1, \dots, X(t_n + h) \in A_n\right) = P\left(X(t_1) \in A_1, \dots, X(t_n) \in A_n\right)$$

für $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $A_1, \dots, A_n \in \sigma_{\mathbb{R}^d}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$.
Die Gleichung (2.8) wird durch einen Phasenraum $\mathcal{B}$, einen linearen Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ sowie eine Anfangsbedingung $\Phi \in \mathcal{B}$ beschrieben. Bei der Frage nach der Existenz einer stationären Lösung ist dieser Zugang nicht zielführend. Denn die Stationarität einer Lösung der Gleichung (2.8) kann – wie es auch hier der Fall sein wird – eine spezielle Anfangsbedingung erfordern, die nicht in dem bereits spezifizierten Phasenraum $\mathcal{B}$ liegen muss. Andererseits ist die Angabe des Phasenraumes $\mathcal{B}$ notwendig zur Charakterisierung des Operators L als einen stetigen Operator. Jedoch existiert nach Satz 2.3.1 für jeden Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ ein eindeutiges Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^{d\times d})$, so dass der Operator L als Integraloperator gemäß (2.11) auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ unabhängig vom Phasenraum $\mathcal{B}$ dargestellt werden kann. Von dieser Darstellung ausgehend, lässt sich in unabhängiger Weise vom zugrunde gelegten Phasenraum in folgender Weise eine stationäre Lösung definieren:

Definition 3.1
Auf einem Phasenraum $\mathcal{B}$ sei der Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ mit der Einschränkung L_c auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ gegeben. Gleichung (2.8) besitzt eine stationäre Lösung *genau dann, falls ein Phasenraum $\mathcal{C}$ existiert, so dass:*

a) *eine eindeutige Fortsetzung $L_{\mathcal{C}}$ von L_c mit $L_{\mathcal{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^d)$ existiert;*

b) *eine $\mathcal{C}$-wertige, $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariable Φ existiert, so dass die Gleichung*

$$X(t) = \Phi(0) + \int_0^t L_{\mathcal{C}}(X_s)\, ds + W(t), \quad t \geqslant 0, \quad X_0 = \Phi,$$

eine stationäre Lösung besitzt.

Durch den Wechsel des Phasenraumes in Definition 3.1 wird die Dynamik der zugrunde liegenden Differentialgleichung nicht verändert. Lediglich der Raum der zugelassenen Anfangsbedingungen wird an das Problem der Existenz einer stationären Lösung adaptiert.
Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ sei reichhaltig genug, um einen weiteren, von W unabhängigen, $\mathbb{R}^d$-wertigen Wiener-Prozess $W_1 := \{W_1(t), \mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ zu tragen. Es wird der Prozess W auf $\mathbb{R}_-$ fortgesetzt durch:

$$W(t) := \begin{cases} W(t) & , t \geqslant 0, \\ W_1(-t) & , t \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Des Weiteren bezeichne r die Differential-Resolvente des Maßes $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$, das das Funktional L auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ darstellt. Als Kandidat für die stationäre Lösung bietet sich ein “moving average”-Prozess an. Dies ist ein Prozess der Form:

$$\Phi := \{\Phi(t) := \int_{-\infty}^{t} r(t-s)\, dW(s),\ t \in \mathbb{R}\}. \tag{3.19}$$

Das uneigentliche Integral lässt sich auf zwei Arten definieren:

a) partielle Integration:

Wie in Definition 2.3.b wird das Integral für $t \in \mathbb{R}$ als pfadweiser Limes verstanden:

$$\int_{-\infty}^{t} r(t-s)\, dW(s) := \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{t} r(t-s)\, dW(s) \quad \text{P-f.s.}$$

Durch geeignete Voraussetzungen muss die Existenz des Grenzwertes des Riemann-Stieltjes-Integrals und von $W(-T)r(t+T)$ für $T \to \infty$ P-f.s. gewährleistet sein.

b) schwacher Limes:

Für $t \in \mathbb{R}$ und $T < t$ werden die Zufallsvariablen

$$I(-T) := \int_{-T}^{t} r(t-s)\, dW(s)$$

als verteilungskonvergent für $T \to \infty$ vorausgesetzt. In Lemma 2.4 in [GK00] ist gezeigt, dass dieser schwache Limes genau dann existiert, falls $r \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d})$ gilt. In diesem Fall findet der Grenzübergang auch P-f.s. statt und das Integral in (3.19) wird als die Zufallsvariable definiert, die sich als P-fast sicherer Grenzwert ergibt.

Existiert das Integral sowohl in dem Sinn von a als auch von b, so sind die Integrale P-f.s. identisch. Im Folgenden werden wir das Integral stets im Sinn von a verstehen, jedoch erlauben die betrachteten Situationen immer das Verständnis des Integrals gemäß b.
Das folgende Lemma garantiert schließlich die Wohldefiniertheit des Prozesses Φ in (3.19):

Lemma 3.2
Die Differential-Resolvente r eines Maßes $\nu \in M^\alpha(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^{d\times d})$ mit $\alpha > \frac{1}{2}$ erfülle $r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$. Definiere für $i = 0, 1$:

$$Z^{(i)}(t) := \int_{-\infty}^{t} \left| r^{(i)}(t-s)W(s) \right| \, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $r^{(0)} := r$ und $r^{(1)} := \dot{r}$. Man erhält P-f.s. für alle $t \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1$:

a) *$t \mapsto Z^{(i)}(t)$ ist endlich und stetig;*

b) $t \mapsto \int_{\mathbb{R}_-} Z_t^{(i)}(u)\ |\nu|(du)$ *ist endlich und stetig.*

Beweis: Der Beweis wird nur für $Z := Z^{(0)}$ formuliert. Die Aussagen für $Z^{(1)}$ lassen sich analog nachweisen. Auf die Notation der pfadweisen Abhängigkeit von ω, etwa bei Konstanten, wird in diesem Beweis verzichtet.
Für jedes $T \in \mathbb{R}$ existiert nach dem Gesetz des iterierten Logarithmus eine Konstante $C = C(T)$, so dass $|W(s)| \leqslant C(1 + |s|^\alpha)$ für $s \in (-\infty, T]$ P-f.s. gilt.
Die Zufallsvariable $Z(t)$ ist P-f.s. endlich, da aus den Sätzen 3.2.4 und 3.2.8 P-f.s. für $t \leqslant T$ folgt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} |r(t-s)W(s)|\ ds &= \int_{-\infty}^{0} |r(-s)W(s+t)|\ ds \\ &\leqslant C \int_{-\infty}^{0} |r(-s)|\,(1 + |s+t|^\alpha)\, ds \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Für den Nachweis der Endlichkeit in Aussage b impliziert Satz 3.2.8 für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}_-} \left(\int_{-\infty}^{t+u} |r(t+u-s)W(s)|\ ds \right) |\nu|(du) \\ &\quad\leqslant C_1 \int_{\mathbb{R}_-} \left(\int_{-\infty}^{0} |r(-s)|\,(1 + |t+u+s|^\alpha)\, ds \right) |\nu|(du) \\ &\quad\leqslant C_2 \int_{\mathbb{R}_-} \left(\int_{-\infty}^{u} |r(-s)|\,(1 + |u+s|^\alpha)\, ds + \int_{u}^{0} |r(-s)|\,(1 + |u+s|^\alpha)\, ds \right) |\nu|(du) \\ &\quad\leqslant C_3 \left(\|\nu\|_{TV} \int_{0}^{\infty} |r(s)|\,(1 + s^\alpha)\, ds + \|r\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}_-} (1 + |u|^\alpha)\ |\nu|(du) \right) \\ &\quad< \infty\end{aligned}$$

mit von t abhängigen Konstanten C_1, C_2, $C_3 > 0$. Für den Nachweis der Stetigkeit definiere

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}, \quad g(u,s) := |r(-s)W(s+u)|\,.$$

Aus dem Satz für parameterabhängige Integrale folgt, dass die Abbildung

$$u \mapsto Z(u) := \int_{-\infty}^{u} |r(u-s)W(s)|\ ds = \int_{-\infty}^{0} g(u,s)\, ds$$

P-f.s. für $u \in \mathbb{R}$ stetig ist. Eine weitere Anwendung des Satzes für parameterabhängige Integrale impliziert die P-f.s. Stetigkeit der Abbildung in der Aussage b. □

In der Definition 3.1 einer stationären Lösung wird ein Phasenraum $\mathcal{C}$ verlangt, auf dem sowohl der gegebene Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ als Fortsetzung wohldefiniert ist als auch in dem die Anfangsbedingung enthalten ist, die eine stationäre Lösung erlaubt. Dies wird der in Beispiel 2.2.4 eingeführte Phasenraum $C_g^0 = C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ für eine Funktion $g(u) = 1 + |u|^\gamma$ mit einem geeigneten Parameter $\gamma \geqslant 0$ sein.

Lemma 3.3
Ein Funktional $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ besitze die Einschränkung L_c auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$, die gemäß (2.11) durch ein Maß $\nu \in M^\alpha(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^{d\times d})$ mit $\alpha > 0$ gegeben sei. Dann gilt:

a) *für jedes $\gamma \in [0, \alpha]$ existiert die eindeutige Fortsetzung L_γ von L_c mit*

$$L_\gamma : C_g^0 \to \mathbb{R}^d, \quad L_\gamma \varphi = \int_{(-\infty,0]} \nu(du)\, \varphi(u) \quad \text{für alle } \varphi \in C_g^0 = C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$$

und $L_\gamma \in \mathcal{L}(C_g^0, \mathbb{R}^d)$ für $g(u) = 1 + |u|^\gamma$.

b) *falls $\alpha > \frac{1}{2}$ ist und die Differential-Resolvente r des Maßes ν in $L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$ liegt, so erhält man für $\gamma \in (\frac{1}{2}, \alpha]$:*

$$\Phi := \{\Phi(u) := \int_{-\infty}^{u} r(u-s)\, dW(s),\ u \leqslant 0\} \tag{3.20}$$

ist eine $\mathcal{F}_0$-messbare, $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$-wertige Zufallsvariable für $g(u) = 1 + |u|^\gamma$.

Beweis:
a) Für eine Funktion $\varphi \in C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ zeigt für $k \in \mathbb{N}$ die Folge von Funktionen

$$\psi^k(u) := \begin{cases} \varphi(u) & , u \in [-k, 0], \\ 0 & , u \leqslant -k-1, \\ \varphi(-k)u + (k+1)\varphi(-k) & , u \in [-k-1, -k], \end{cases}$$

dass $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ dicht in $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ bezüglich $\|\cdot\|_{C_g^0}$ liegt. Es folgt die Existenz einer eindeutigen Fortsetzung des Operators L_c auf $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$. Für den Operator L_γ gilt mit $\varphi \in C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$:

$$\int_{(-\infty,0]} |\varphi(s)|\ |\nu|(ds) \leqslant \|\varphi\|_{C_g^0} \int_{(-\infty,0]} (1 + |u|^\gamma)\ |\nu|(ds) \leqslant C_1 \|\varphi\|_{C_g^0},$$

mit einer Konstanten $C_1 = C_1(\gamma) > 0$. Es ist $L_\gamma \in \mathcal{L}(C_g^0, \mathbb{R}^d)$ nachgewiesen und da $L_\gamma = L_c$ auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung die Behauptung.
b) Da $r(t) = o(-t^\alpha)$ für $t \to \infty$ nach Satz 3.2.8 gilt, folgt für $u \leqslant 0$ nach dem Gesetz des iterierten Logarithmus $W(-T)r(u+T) \to 0$ P-f.s. für $T \to \infty$. Lemma 3.2 begründet die Wohldefiniertheit des Prozesses Φ wegen Formel (2.13) der partiellen Integration.

Für $\gamma \in (\frac{1}{2}, \alpha)$ wähle $\delta \in (\frac{1}{2}, \gamma)$. Nach dem Gesetz des iterierten Logarithmus existiert eine Konstante $C = C(\delta)$, so dass $|W(u)| \leqslant C(1 + |u|^\delta)$ für alle $u \leqslant 0$ P-f.s. gilt. Nach Satz 3.2.8 erhält man P-f.s. für $u \leqslant 0$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{u} |\dot{r}(u-s)W(s)|\, ds &\leqslant C \int_{-\infty}^{0} |\dot{r}(-s)|\,(1 + |s+u|^\delta)\, ds \\ &= C_1 \left(\int_{-\infty}^{u} |\dot{r}(-s)|\,(1 + |s|^\delta)\, ds + \int_{u}^{0} |\dot{r}(-s)|\,(1 + |u|^\delta)\, ds \right) \\ &\leqslant C_2(1 + |u|^\delta)\end{aligned}$$

mit Konstanten $C_1, C_2 > 0$. Es folgt, dass der Prozess Φ P-f.s. Pfade in $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ besitzt.
Da $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ dicht in $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ liegt, folgt die $\mathcal{F}_0$-Meßbarkeit des stochastischen Prozesses Φ wie in Lemma 1.2. □

Lemma 3.3.b verifiziert die Wohldefiniertheit des in (3.20) definierten Prozesses Φ bei Definition des Integrals durch partielle Integration. Wegen Lemma 3.2.6 existiert das Integral jedoch gemäß beiden auf Seite 58 eingeführten Definitionen.
Für $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ und $\gamma \in (\frac{1}{2}, \alpha]$ existiert unter den Voraussetzungen und mit den Notationen des Lemmas 3.3 eine Lösung $X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung

$$dX(t) = L_\gamma(X_t)\, dt + dW(t), \quad t \geqslant 0, \quad X_0 = \Phi \tag{3.21}$$

zu der Anfangsbedingung Φ in (3.20). Denn mit $g(u) = 1 + |u|^\gamma$ ist die Anfangsbedingung Φ eine C_g^0-wertige Zufallsvariable und der Operator L_γ ist stetig und linear auf C_g^0. Nach Korollar 2.6 existiert eine eindeutige Lösung $X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung (3.21). Eine Darstellung und die Eigenschaft der Stationarität dieser Lösung $X(\cdot, \Phi)$ gibt der folgende Satz an.

Satz 3.4
Das Funktional $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ werde in der Darstellung (2.11) durch ein Maß $\nu \in M^\alpha(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^{d\times d})$ mit $\alpha > \frac{1}{2}$ repräsentiert. Erfüllt die Differential-Resolvente r des Maßes ν die Aussage $r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$, so ist der Prozess

$$X := \left\{ X(t) := \int_{-\infty}^{t} r(t-s)\, dW(s),\ t \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.22}$$

eine stationäre Lösung der Gleichung (2.8) zu der Anfangsbedingung

$$\Phi := \left\{ \Phi(u) := \int_{-\infty}^{u} r(u-s)\, dW(s),\ u \leqslant 0 \right\}.$$

Beweis: Für $\gamma \in (\frac{1}{2}, \alpha]$ sei L_γ das Funktional $L_\gamma \in \mathcal{B}(C_g^0, \mathbb{R}^d)$ mit $g(u) := 1 + |u|^\gamma$, $u \leqslant 0$, gemäß Lemma 3.3.a. Es ist P-f.s. für alle $t \geqslant 0$ zu zeigen:

$$X(t) - \Phi(0) - \int_0^t L_\gamma X_s\, ds - W(t) = 0,$$

das wegen der Formel der partiellen Integration (2.13) äquivalent ist zu

$$\int_{-\infty}^{t} \dot r(t-s)W(s)\,ds - \int_{-\infty}^{0} \dot r(-s)W(s)\,ds - \int_{0}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\,W(s+u)\right) ds \\ - \int_{0}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\left(\int_{-\infty}^{s+u} \dot r(s+u-v)W(v)\,dv\right)\right) ds = 0. \tag{3.23}$$

Lemma 3.2 begründet die Existenz der Integrale außer für das dritte Integral. Dessen Existenz gewährleistet der Satz vom iterierten Logarithmus, und Lemma 2.4 impliziert:

$$\int_{0}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\,W(s+u)\right) ds = \int_{-\infty}^{t} \nu([s-t, s\wedge 0])W(s)\,ds \quad \text{für } t \geqslant 0. \tag{3.24}$$

Da das letzte Integral in (3.23) nach Lemma 3.2.b für den Betrag des Integranden existiert, erhält man mit dem Satz von Fubini für $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} &\int_{0}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\left(\int_{-\infty}^{s+u} \dot r(s+u-v)W(v)\,dv\right)\right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\left(\int_{-\infty}^{u}\left(\int_{0}^{t} \dot r(s+u-v)\,ds\right) W(v)\,dv\right) \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\left(\int_{u}^{u+t}\left(\int_{v-u}^{t} \dot r(s+u-v)\,ds\right) W(v)\,dv\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\left(\int_{-\infty}^{t+u} r(t+u-v)W(v)\,dv\right) - \int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\left(\int_{-\infty}^{u} r(u-v)W(v)\,dv\right) \\ &\qquad - \int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\left(\int_{u}^{t+u} W(v)\,dv\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Lemma 3.2.b begründet die Existenz der beiden ersten iterierten Integrale in (3.25), so dass sich aus einer weiteren Anwendung des Satzes von Fubini ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\left(\int_{-\infty}^{t+u} r(t+u-v)W(v)\,dv\right) &= \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{[v-t,0]} \nu(du)\,r(t+u-v)\right) W(v)\,dv \\ &= \int_{-\infty}^{t} \dot r(t-v)W(v)\,dv \end{aligned} \tag{3.26}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\left(\int_{-\infty}^{u} r(u-v)W(v)\,dv\right) &= \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{[v,0]} \nu(du)\,r(u-v)\right) W(v)\,dv \\ &= \int_{-\infty}^{0} \dot r(-v)W(v)\,dv. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Eine Anwendung des Satzes von Fubini ergibt für den letzten Term in (3.25)

$$\int_{\mathbb{R}_-} \nu(du) \left(\int_u^{t+u} W(v)\, dv \right) = \int_{-\infty}^{t} \nu([v-t, v \wedge 0]) W(v)\, dv. \tag{3.28}$$

Die Anwendung des Satzes von Fubini ist möglich, da nach dem Satz vom iterierten Logarithmus für $t \geqslant 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-} \left(\int_u^{t+u} |W(v)|\, dv \right) |\nu|(du) &\leqslant C_0 \int_{(-\infty,-t]} \left(\int_u^{t+u} (1+|v|^\gamma)\, dv \right) |\nu|(du) + C_1 \\ &\leqslant t\, C_0 \int_{(-\infty,-t]} (1+|u|^\gamma)\ |\nu|(du) + C_1 \\ &< \infty \end{aligned}$$

mit von t abhängigen Konstanten C_0, $C_1 > 0$. Die Gleichungen (3.24) bis (3.28) begründen das Erfüllen der Gleichung (3.23). Die Stationarität folgt unmittelbar aus der Berechung des Erwartungswertes und der Kovarianzfunktion des Prozesses X. □

Bemerkung 3.5 Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.4 folgt $r \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d})$ nach Lemma 3.2.6.b. Aufgrund der Itô-Isometrie (Proposition 3.2.10 in [KS91]) ist der Prozess X in (3.22) ein stationärer Gauß-Prozess mit $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ für $t \in \mathbb{R}$ und

$$\mathrm{Cov}[X(t), X(t+h)] = \int_0^\infty r(s)(r(s+|h|))^T\, ds \quad \text{für } t, h \in \mathbb{R}\,.$$

Bezeichnet Δ_ν die in Definiton 3.1.6 eingeführte charakteristische Matrix des Maßes ν, so ergibt sich aus der Plancherel-Gleichung (Satz 7.9 in [Rud73]) die Spektraldichte f des Prozesses X als

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \left(\Delta_\nu(-is)\right)^{-1} \left(\Delta_\nu(is)\right)^{-T} \quad \text{für } s \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Argumentation ist für den Fall eines endlichen Gedächtnisses bekannt, siehe etwa [KM92].

In Satz 3.4 kommen die Besonderheiten des unendlichen Gedächtnisses zum Tragen. Das nicht beschränkte Integrationsintervall und die nicht nur exponentiellen Konvergenzraten der Differential-Resolvente im stabilen Fall erfordern eine genaue Verifikation der Endlichkeit der involvierten Integrale. Die geforderte Existenz des α-ten Momentes des Maßes ν impliziert zum einen eine Abfallrate der Differential-Resolvente (Satz 3.2.8), so dass der Prozess X in (3.22) nach Lemma 3.2.a wohldefiniert ist. Zum anderen wird gewährleistet, dass der Operator L auf das Segment X_t des Prozesses X in (3.22) für $t \geqslant 0$ angewandt werden kann, siehe Lemma 3.2.b. Erfüllt das Maß ν nicht die Momentenbedingung, ist unseres Wissens im Allgemeinen keine ausreichende Konvergenzrate der Differential-Resolvente des Maßes ν gewährleistet, um diese Eigenschaften

zu verifizieren. Am Ende dieses Abschnittes geben wir in 3.13 ein Beispiel an, in dem zwar der Prozess X wohldefiniert ist, nicht jedoch die Anwendung des Operators L auf X_t für $t \geqslant 0$.
Bei der allgemeineren Frage nach der Existenz einer Grenzverteilung, gegen die eine Lösung $X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung (2.8) zu einer Anfangsbedingung Φ eines Phasenraumes in Verteilung für $t \to \infty$ konvergiert, kann man sich von der Endlichkeit des Maßes lösen. Diese Aussage wird in dem folgenden Resultat in einer globalen Version für alle Anfangsbedingung eines Phasenraumes formuliert. Es bezeichne hier $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^d$.

Satz 3.6
Es sei $\mathcal{B}$ ein Phasenraum und die durch $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ beschriebene homogene Differentialgleichung (2.10) sei asymptotisch stabil in $\mathbb{R}^d$. Falls die Differential-Resolvente r in $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$ liegt, so folgt für jede Lösung $X(\cdot, \Phi) := (X^1(\cdot), \ldots, X^d(\cdot))^T$ der Gleichung (2.8) zu einer Anfangsbedingung $\Phi \in \mathcal{B}$ für beliebige $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ und $n \in \mathbb{N}$ sowie $k = 1, \ldots, d$:

$$(X^k(t+t_1), \ldots, X^k(t+t_n))^T \xrightarrow{\mathcal{D}} U^k \quad \text{für } t \to \infty,$$
$$\text{mit } U^k \overset{\mathcal{D}}{=} N(0, \Sigma_k) \text{ und } \Sigma_k = \left(\int_0^\infty \langle r^k(s), r^k(|t_i - t_j| + s) \rangle ds \right)_{i,j=1}^n,$$

wobei r^k die k-te Zeile von r für $k = 1, \ldots, d$ bezeichnet.

Beweis: Definiere für $k = 1, \ldots, d$ die Vektoren

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$
$$\mathbb{X}(t) = \left(X^k(t+t_1), \ldots, X^k(t+t_n)\right)^T,$$
$$\mathbb{Y}(t) = \left(\int_0^{t+t_1} r^k(t+t_1-s)\, dW(s), \ldots, \int_0^{t+t_n} r^k(t+t_n-s)\, dW(s) \right)^T.$$

Wegen der Bedingung A.b an den Phasenraum $\mathcal{B}$ folgt aus der $\mathcal{F}_0$-Meßbarkeit von Φ die Unabhängigkeit der k-ten Komponente von $(T(s)\,\Phi)(0)$ und $\mathbb{Y}(t)$ für $s,\, t \geqslant 0$.
Aufgrund der asymptotischen Stabilität der homogenen Differentialgleichung in $\mathbb{R}^d$ erhält man für ihre Lösungshalbgruppe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ für $j = 1, \ldots, n$:

$$\lim_{t\to\infty} |(T(t+t_j)\Phi)(0)| \to 0 \quad \text{P-f.s.}$$

Aus diesen beiden Aussagen folgt mit der Darstellung (2.16) der Lösung $X(\cdot, \Phi)$:

$$\lim_{t\to\infty} \left| \mathbb{E}\left[e^{i\langle u, \mathbb{X}(t)\rangle} - e^{i\langle u, \mathbb{Y}(t)\rangle} \right] \right| = 0.$$

Die charakteristische Funktion von $\mathbb{Y}(t)$ ist für jedes $t \geqslant 0$ gegeben durch:

$$\mathbb{E}\left[e^{i\langle u, \mathbb{Y}(t)\rangle} \right] = e^{-\frac{1}{2} u^T \Sigma(t) u}$$
$$\text{mit} \quad \Sigma(t) = \left(\int_0^{t+(t_i\wedge t_j)} \langle r^k(s), r^k(|t_i - t_j| + s) \rangle\, ds \right)_{i,j=1}^n.$$

Da $\Sigma(t) \to \Sigma_k$ für $t \to \infty$ gilt, folgt die Behauptung aus der Konvergenz der charakteristischen Funktion des Zufallsvektors $\mathbb{Y}(t)$ für $t \to \infty$. $\square$

Bemerkung 3.7 Falls in Satz 3.6 der Phasenraum $\mathcal{B}$ von verblassendem Gedächtnis ist, kann die Forderung der asymptotischen Stabilität der homogenen Gleichung in $\mathbb{R}^d$ durch $r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$ ersetzt werden. Denn unter Beachtung von Bemerkung 3.1.7 folgt aus den Sätzen 3.2.4 und 2.5.10.a die asymptotische Stabilität der homogenen Gleichung in $\mathcal{B}$ und $\mathbb{R}^d$.

Das folgende Beispiel zeigt eine Anwendung der Bemerkung 3.7 auf eine Gleichung, wie sie in [IN64] betrachtet wird.

Beispiel 3.8 Zu einem Maß $\nu \in M^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^{d\times d})$ mit

$$\int_{(-\infty,0]} \nu(du) < 0 \quad \text{und} \quad \int_{(-\infty,0]} |u| \; |\nu|(du) < 1 \tag{3.29}$$

definiere auf dem Phasenraum C_g^0 mit $g(u) = 1 + |u|$ für $u \leqslant 0$ das stetige Funktional

$$L\varphi = \int_{(-\infty,0]} \nu(du)\, \varphi(u) \quad \text{für } \varphi \in C_g^0 = C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d). \tag{3.30}$$

Für die Differential-Resolvente r des Maßes ν kann wie in [IN64] durch den Satz von Paley-Wiener (Satz 19.2 in [Rud87]) nachgewiesen werden, dass die Differential-Resolvente r in $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$ liegt. Wegen Satz 3.2.10 folgt $r \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$. Da nach Beispiel 2.5.3 der Phasenraum $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ von verblassendem Gedächtnis ist, gilt wegen Bemerkung 3.7 die Aussage des Satzes 3.6 für jede Lösung $X(\cdot, \Phi)$ der stochastischen Differentialgleichung (2.8) zu einer C_g^0-wertigen Anfangsbedingung Φ.

Satz 3.9
Es seien $\mathcal{B}$ ein Phasenraum und $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ ein Operator, der gemäß (2.11) auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ durch das Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^{d\times d})$ dargestellt werde. Existiert zu einer Anfangsbedingung $\Phi \in \mathcal{B}$ eine Lösung $X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung (2.8), die in Verteilung für $t \to \infty$ konvergiert, so gilt für die Differential-Resolvente r des Maßes ν:

$$r \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d}).$$

Beweis: Diese Aussage kann analog zu der Implikation $ii \Rightarrow iv$ in Satz 3.1 in [GK00] nachgewiesen werden. $\square$

Die für die Existenz einer stationären Lösung notwendige Bedingung der quadratischen Integrierbarkeit der Differential-Resolvente gemäß Satz 3.9 ist wegen Satz 3.2.10 äquivalent zu ihrer Integrierbarkeit, falls das erste Moment des zugrunde liegenden Maßes existiert. Die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente ist jedoch gerade eine der Bedingungen, um die Existenz einer stationären Lösung in Satz 3.4 zu gewährleisten. Als Konsequenz erhält man folgende äquivalente Bedingungen zur Existenz einer stationären Lösung.

Korollar 3.10
Das Funktional $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ werde auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ gemäß (2.11) durch ein Maß $\nu \in M^\alpha(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^{d\times d})$ mit $\alpha \geqslant 1$ repräsentiert. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) *es existiert eine stationäre Lösung $X(\cdot, \Phi)$ von (2.8) zu einer Anfangsbedingung $\Phi \in C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ für $g(u) = 1 + |u|^\gamma$ und einem $\gamma \in (\frac{1}{2}, \alpha]$;*

b) *es existiert ein $\Phi \in C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ für $g(u) = 1 + |u|^\gamma$ mit einem $\gamma \in (\frac{1}{2}, \alpha]$, so dass die Lösung $X = (\cdot, \Phi)$ von (2.8) existiert und in Verteilung für $t \to \infty$ konvergiert;*

c) *zu jedem $\Phi \in C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ mit $g(u) = 1 + |u|^\gamma$ und jedem $\gamma \in (\frac{1}{2}, \alpha]$ existiert die Lösung $X(\cdot, \Phi)$ von (2.8). Diese Lösung konvergiert in Verteilung für $t \to \infty$;*

d) *für die Differential-Resolvente r von ν gilt: $r \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d\times d})$.*

Beweis: Nach Lemma 3.3.a besitzt der Operator L eine eindeutige Fortsetzung $L_\gamma \in \mathcal{L}(C_g^0, \mathbb{R}^d)$ für $g(u) = 1 + |u|^\gamma$ für jedes $\gamma \in (\frac{1}{2}, \alpha]$. Zu der stochastischen Differentialgleichung (3.21), die durch den Operator L_γ beschrieben wird, existiert für jede Anfangsbedingung $\Phi \in C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ eine eindeutige Lösung. In diesem Sinn sind die Aussagen b und c zu verstehen.
Aussage d impliziert nach Satz 3.2.10 die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente. Nach Satz 3.4 existiert eine stationäre Lösung zu der in (3.20) definierten Anfangsbedingung Φ, die nach Lemma 3.3.b Pfade in dem behaupteten Raum $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ der Aussage a besitzt. Aus Aussage a folgt unmittelbar die Aussage b. Die Aussage b impliziert nach Satz 3.9 die quadratische Integrierbarkeit der Differential-Resolvente in der Aussage d. Die Aussagen a, b und d sind als äquivalent nachgewiesen.
Aussage d impliziert nach Satz 3.2.10 die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente r. Da nach Beispiel 2.5.3 die Räume $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ mit $g(u) = 1 + |u|^\gamma$ für jedes $\gamma \in (\frac{1}{2}, \alpha]$ Phasenräume von verblassendem Gedächtnis sind, folgt Aussage c nach Bemerkung 3.7. Umgekehrt impliziert Aussage c wegen Satz 3.9 auch Aussage d. □

Beispiel 3.11 (Fortsetzung von 3.8)
Ohne den Zugang der Phasenräume werden in [IN64] Gleichungen der Form (2.8) betrachtet, in denen der Operator wie in (3.30) als ein Integraloperator mit einem Maß ν gegeben ist. Falls das Maß ν die speziellen Bedingungen (3.29) erfüllt, so ist in Satz 16 in [IN64] gezeigt, dass ein stationärer Prozess der Form (3.22) existiert, der die Gleichung (2.8) erfüllt. Wegen Beispiel 3.8 impliziert Satz 3.4 und Korollar 3.10 in dieser Situation dieselbe Aussage. Korollar 3.10 gibt zusätzlich den Phasenraum an, in dem die stationäre Lösung liegt, und ist unter allgemeineren Voraussetzungen formuliert.
Die Äquivalenz der Aussagen in Korollar 3.10 ist in [IN64] nicht formuliert.

Bemerkung 3.12 Falls das Maß $\nu \in M^{\alpha}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^{d\times d})$ in Korollar 3.10 die stärkere Forderung $\hat{\beta}_\nu < 0$ erfüllt, so kann der Raum $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ durch den Phasenraum $C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ mit einem geeigneten $\gamma \in (\hat{\beta}_\nu, 0)$ ersetzt werden, siehe [Rie01].

Im folgenden Beispiel wird die Situation betrachtet, dass das Maß ν in Korollar 3.10 nicht endlich ist. Es zeigt sich, dass keine stationäre Lösung von (2.8) existieren muss, obwohl die Differential-Resolvente des nicht-endlichen Maßes ν für jedes $p \geqslant 1$ in $L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ liegt. Trotzdem gilt in diesem Beispiel, dass jede Lösung der betrachteten Gleichung in Verteilung gegen ein Gauß-Maß konvergiert.

Beispiel 3.13 Definiere den Operator

$$L\varphi = \int_{-\infty}^{0} \varphi(u) q(u)\, du \qquad \text{mit } q(u) := -\tfrac{25}{2} e^{6u} - \tfrac{9}{2} e^{-2u} \quad \text{für} \quad u \leqslant 0.$$

Dieser Operator ist linear und stetig auf dem Phasenraum $\mathbb{R} \times L_g^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ mit $g(s) = \exp(-2s)$ für $s \leqslant 0$. Durch Methoden, die wir im Kapitel 5 vorstellen, ergibt sich die Differential-Resolvente r des Maßes $q(u)\, du$ als

$$r(t) = -16e^{-2t} + 17e^{-t} - 15te^{-t} \quad \text{für} \quad t \geqslant 0,$$

die offensichtlich in $L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ für jedes $p \geqslant 1$ liegt. Für Maße $q(u)\, du$ der hier betrachteten Form wird in Kapitel 5 gezeigt, dass die Integrierbarkeit der Differential-Resolvente die asymptotische Stabilität in $\mathbb{R}^d$ der homogenen Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(x_t), \quad t \geqslant 0, \\ x_0 &= \varphi \quad \text{für } \varphi \in \mathbb{R} \times L_g^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

impliziert. Für jede Lösung $X(\cdot) = X(\cdot, \Phi)$ der stochastischen Gleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= L(X_t)\, dt + dW(t), \quad t \geqslant 0, \\ X_0 &= \Phi \quad \text{für } \Phi \in \mathbb{R} \times L_g^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}), \end{aligned} \tag{3.31}$$

folgt aus Satz 3.6 für jedes $h \geqslant 0$:

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ X(t+h) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} U \quad \text{für } t \to \infty \quad \text{mit } U \stackrel{\mathcal{D}}{=} N(0, \Sigma), \tag{3.32}$$
$$\Sigma = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 37 & e^{-|h|}(37 + 35\,|h|) \\ e^{-|h|}(37 + 35\,|h|) & 37 \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir an, dass eine stationäre Lösung $G = \{G(s) : s \in \mathbb{R}\}$ der Gleichung (3.31) existiert. Dann muß G ein stationärer Gauß-Prozess wegen (3.32) sein, so dass für jedes $s \in \mathbb{R}$ und $h \geqslant 0$ die Verteilung des Vektors $(G(s), G(s+h))^T$ der Verteilung der Zufallsvariablen U in (3.32) entspricht. Die Anwendung des Funktionals L auf G_s muss

für jedes $s \geqslant 0$ wohldefiniert sein, insbesondere erfordert dies für $s = 0$ die Existenz des Integrals
$$\int_{-\infty}^{0} G(u)q(u)\,du.$$
Unabhängig davon, ob dieses Integral als Riemann- oder Lebesgue-Integral verstanden wird, ist die folgende Konvergenz für dessen Existenz notwendig:
$$Y(t) := \int_{-t}^{0} G(s)q(s)\,ds \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_{-\infty}^{0} G(s)q(s)\,ds \quad \text{für } t \to \infty.$$
Da G ein Gauß-Prozess ist, erfordert diese Konvergenz in Verteilung die Beschränktheit der Varianzen $\mathbb{E}[Y^2(t)]$ für $t \in \mathbb{R}_+$. Es gilt aber:
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^2(t)] &= \mathbb{E}\left[\int_{-t}^{0}\int_{-t}^{0} G(u)G(u+(s-u))q(u)q(s)\,du\,ds\right] \\
&= \int_{-t}^{0}\int_{-t}^{0} \tfrac{1}{4}e^{-|s-u|}(37+35\,|s-u|)q(u)q(s)\,du\,ds \\
&\to \infty \quad \text{für } t \to \infty.
\end{aligned}$$
Deshalb kann keine stationäre Lösung der Gleichung (3.31) existieren, obwohl jede Lösung dieser Gleichung in Verteilung gegen ein Gaußmaß konvergiert.

Kapitel 5

Reduzierbare Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis

Zu Beginn des Kapitels behandeln wir innerhalb der in Kapitel 2 vorgestellten Theorie der deterministischen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis die Eigenschaft der Reduzierbarkeit von Differentialgleichungen mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit. Durch die Darstellungstheorie von Matrizen lassen sich die Matrizen, die sich aus der Reduzierung dieser Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis auf gewöhnliche Differentialgleichungen ergeben, in Satz 3.12 und Korollar 3.14 klassifizieren. Hierdurch lässt sich das inverse Problem in Satz 3.16 lösen. Durch Resultate des Abschnittes 4.3 über stationäre Lösungen können wir in Korollar 4.3 einen starken Zusammenhang zwischen der Lösung einer affinen stochastischen Differentialgleichung mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit und einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess formulieren, der aus der Reduzierbarkeit der betrachteten Gleichung folgt.

1 Einleitung

In vielen Anwendungen von funktionalen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis werden die Vergangenheiten durch so genannte Quasi-Polyome oder Gammadichten gewichtet. Dies ist der Fall bei Beispiel 1.3.1 oder bei [Cus77] und [Mac78] für das in 1.3.2 betrachtete Populationsmodell. Quasi-Polynome sind eine naheliegende Verallgemeinerung der Exponentialfunktion, die vielen Zusammenhängen der Natur zugrunde liegt, und ermöglichen eine reichhaltige Parametrisierung des Modells.

Definition 1.1
Ein einfaches Quasi-Polynom vom Grad n *ist eine Funktion* $q_1 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}$ *der Form*

$$q_1(u) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j!} u^j e^{\gamma u} \quad \textit{für } u \leqslant 0, \tag{1.1}$$

wobei $a_j \in \mathbb{K}$ *für* $j = 0, \ldots, n$ *mit* $a_n \neq 0$ *und* $\gamma \in \mathbb{K}$ *mit* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Ein (allgemeines) Quasi-Polynom *ist eine Funktion* $q : \mathbb{R}_- \to \mathbb{K}$ *der Form*

$$q(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{j!} u^j e^{\gamma_i u} \quad \textit{für } u \leqslant 0, \tag{1.2}$$

wobei $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ *für* $j = 0, \ldots, n_i$ *und* $i = 0, \ldots, m$, *mit* $a_{i,n_i} \neq 0$ *für* $i = 1, \ldots, m$, $\gamma_i \in \mathbb{K}$ *für* $i = 0, \ldots, m$ *mit* $\gamma_i \neq \gamma_j$ *für* $i \neq j$ *sowie* $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *und* $m \in \mathbb{N}$.

Wird die Vergangenheit einer affinen Differentialgleichung, wie sie in Kapitel 4.2 behandelt wird, durch ein Quasi-Polynom q gewichtet, erhält man:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(0) + \int_0^t \left(\int_{(-\infty,0]} x(s+u) q(u)\, du \right) ds + h(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x(u) &= \varphi(u) \quad \text{für } u \leqslant 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

wobei die Funktion $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}$ stetig ist mit $h(0) = 0$. Die Anfangsbedingung φ ist vorausgesetzt als ein Element eines Phasenraumes $\mathcal{G}_q$, der im folgenden Abschnitt bestimmt wird. Falls auf dem Phasenraum $\mathcal{G}_q$ der Operator

$$L_q : \mathcal{G}_q \to \mathbb{K}, \quad L_q \varphi := \int_{(-\infty,0]} \varphi(u) q(u)\, du, \tag{1.4}$$

linear und stetig ist, so erfüllt Gleichung (1.3) die Voraussetzungen des Satzes 4.2.5, nach dem eine eindeutige Lösung $x = x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichung (1.3) existiert.

2 Deterministische Gleichungen

Aufgrund der Integralform des Operators L in (1.4) bietet sich als Phasenraum $\mathcal{G} = \mathcal{G}_q$ der in Beispiel 2.2.6 eingeführte Raum $(\mathbb{K} \times L^1_g)(\mathbb{R}_-, \mathbb{K})$ an. Zu einem gegebenen Quasi-Polynom q der Form (1.2) definiere

$$\begin{aligned} \mathcal{G} := \mathcal{G}_q : &= (\mathbb{K} \times L^1_g)(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}) \\ : &= \left\{ \varphi : (-\infty, 0] \to \mathbb{K} \ : \ \int_{-\infty}^0 |\varphi(u)|\, g(u)\, du < \infty \right\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\|\varphi\|_{\mathcal{G}} = |\varphi(0)| + \int_{-\infty}^0 |\varphi(u)|\, g(u)\, du, \tag{2.6}$$

mit der Funktion

$$g(u) := (1 + |u| + \cdot + |u|^{n_M}) e^{u \operatorname{Re} \gamma_M} \quad \text{für } u \leqslant 0, \tag{2.7}$$

wobei $M := \operatorname{argmin}\{\operatorname{Re} \gamma_i : i = 1, \ldots, m\}$.

Lemma 2.1

a) *Für jedes Quasi-Polynom* q *der Form* (1.2) *ist* $\mathcal{G}_q$ *ein Phasenraum, der den Bedingungen B und C genügt.*

b) *Falls die Dichte q integrierbar ist, so ist $\mathcal{G}_q$ ein Phasenraum von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis.*

c) *Der Operator L in (1.4) ist stetig auf $\mathcal{G}_q$.*

Beweis:

a) Nach Beispiel 2.2.8 reicht es aus, die in Beispiel 2.2.6 erwähnten Bedingungen an die Funktion g nachzuweisen. Eine einfache Rechnung ergibt für u, $s \leqslant 0$:

$$g(u+s) = \sum_{i=0}^{n_M} |u+s|^i \, e^{\mathrm{Re}\,\gamma_M(u+s)} \leqslant C \left(\sum_{i=0}^{n_M} |u|^i \sum_{j=0}^{n_M} |s|^j \right) e^{\mathrm{Re}\,\gamma_M(u+s)} = Cg(u)g(s)$$

mit einer Konstanten $C > 0$ und $M := \operatorname{argmin}\{\mathrm{Re}\,\gamma_i : i = 1, \ldots, m\}$.

b) Folgt aus Beispiel 2.5.5.

c) Die Stetigkeit des Operators L folgt durch die Abschätzung $|q(s)| \leqslant Cg(s)$ für $s \leqslant 0$ mit einer Konstanten $C > 0$. □

Von Bedeutung sind der in Definition 2.4.2 definierte Parameter β eines Phasenraumes sowie die Konvergenzabszisse $\hat{\beta}_\nu$ des Maßes $\nu(du) = q(u)\,du$ gemäß Definition 3.1.5.

Lemma 2.2
Für ein Quasi-Polynom q der Form (1.2) gilt mit $\nu(du) := q(u)\,du$:

$$-Re\,\gamma_M = \hat{\beta}_\nu = \beta_{\mathcal{G}_q} \quad \textit{für } M := \mathit{argmin}\{Re\,\gamma_i : i = 1, \ldots, m\}.$$

Beweis: Mit $p_M(u) := (1 + |u| + \cdots + |u|^{n_M})$ für $u \leqslant 0$ und g gemäß (2.7) gilt nach Beispiel 4.3.2 in [HMN91] für das Kuratowski-Maß für $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{S}(t)) &\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{u \leqslant 0} \frac{g(u-t)}{g(u)} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{u \leqslant 0} \frac{p_M(u-t)}{p_M(u)} e^{-\mathrm{Re}\,\gamma_M t} \\ &\leqslant C p_M(-t) e^{-\mathrm{Re}\,\gamma_M t} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Nach Definition 2.4.2 erhält man $\beta_{\mathcal{G}_q} \leqslant -\mathrm{Re}\ \gamma_M$. Da nach Satz 2.4.8.a die Funktion $e(\lambda)$ für Re $\lambda > \beta_{\mathcal{G}_q}$ ein Element von $\mathcal{G}_q$ ist, folgt $\beta_{\mathcal{G}_q} \geqslant -\mathrm{Re}\ \gamma_M$.
Die Gleichheit für $\hat{\beta}_\nu$ ist offensichtlich. □

Eine bekannte Eigenschaft von Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis, in denen die Vergangenheit durch ein Quasi-Polynom gewichtet wird, ist die Reduzierbarkeit in eine gewöhnliche Differential- oder Integralgleichung ohne Gewichtung der Vergangenheit.

So werden in [Cus77] und [Mac78] zahlreiche Modelle der Populationsdynamik mit einer quasi-polynomiell gewichteten Vergangenheit betrachtet und die Reduzierbarkeit zur Stabilitätsanalyse ausgenutzt. Auch in anderen Bereichen, in denen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis zur Modellierung dienen, wird die einfache, analytische Zugänglichkeit dieser Differentialgleichung ausgenutzt. Für stochastische Differentialgleichungen mit Gedächtnis wird die Eigenschaft der Reduzierbarkeit in [Sch83] und [Die87] formuliert.

Eine Umkehrung der Eigenschaft der Reduzierbarkeit ist in [Far73] aufgeführt: welche Eigenschaften einer Lösung einer Gleichung mit Gedächtnis implizieren, dass die Vergangenheit durch ein Quasi-Polynom gewichtet wird.

Meist wird die Reduzierbarkeit in der Literatur ohne die Angabe eines Raumes der möglichen Anfangsbedingungen betrachtet oder unter stärkeren Voraussetzungen als hier nachgewiesen, wie etwa in [Die87]. Der gewählte Zugang mit dem eingeführten Phasenraum $\mathcal{G}_q$ ist unseres Wissens bisher nicht festgehalten, weshalb die Eigenschaft der Reduzierbarkeit im nachfolgenden Satz festgehalten wird. Die Einführung der Notationen dieses Kapitels nutzen wir zu einer heuristischen Begründung der Reduzierbarkeit, in der die Differenzierbarkeit der Funktion h sowie die mögliche Vertauschung jeder auftretenden Differentiation und Integration angenommen werden.

Für ein Quasi-Polynom q der Form (1.2) definiere mit $N := n_1 + \cdots + n_m + m$:

$$\tau : \mathcal{G}_q \to \mathbb{K}^{N+1}, \quad \tau(\varphi) := (\varphi(0), \tau_1^1(\varphi), \ldots, \tau_{n_1+1}^1(\varphi), \tau_1^2(\varphi), \ldots, \tau_{n_m+1}^m(\varphi))^T, \tag{2.8}$$
$$\tau_k^i(\varphi) := \sum_{j=0}^{n_i-k+1} \frac{a_{i,j+k-1}}{j!} \int_{-\infty}^0 s^j e^{\gamma_i s}\varphi(s)\, ds, \quad k = 1, \ldots, n_i+1, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Für die eindeutige Lösung x der Gleichung (1.3) definiere für $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\tau_k^i(t) :&= \tau_k^i(x_t) \\ &= \sum_{j=0}^{n_i-k+1} \frac{a_{i,j+k-1}}{j!} \int_{-\infty}^t (s-t)^j e^{\gamma_i(s-t)} x(s)\, ds, \quad k = 1, \ldots, n_i+1, \quad i = 1, \ldots, m.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Für eine differenzierbare Funktion h lässt sich die Gleichung (1.3) für $t \geqslant 0$ schreiben als:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \tau_1^i(t) + \dot{h}(t).$$

Durch Differentiation der Funktionen τ_1^i für $i = 1, \ldots, m$ erhält man Differentialgleichungen der Form:

$$\dot{\tau}_1^i(t) = -\gamma_i \tau_1^i(t) + a_{i,0}x(t) - \tau_2^i(t) \quad \text{für } t \geqslant 0.$$

Eine wiederholte Differentiation, jede der Funktionen τ_1^i wird n_i-mal differenziert, resultiert in einem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ \tau_1^1(t) \\ \vdots \\ \tau_{n_1+1}^1(t) \\ \tau_1^2(t) \\ \vdots \\ \tau_{n_m+1}^m(t) \end{pmatrix} = D_q \begin{pmatrix} x(t) \\ \tau_1^1(t) \\ \vdots \\ \tau_{n_1+1}^1(t) \\ \tau_1^2(t) \\ \vdots \\ \tau_{n_m+1}^m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dot{h}(t) \quad \text{für } t \geqslant 0.$$

Die Matrix D_q ist gegeben durch

$$D := D_q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{1,0} & & & & & & & 0 \\ a_{1,1} & & C_1 & & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{1,n_1} & & & & & & & 0 \\ a_{2,0} & & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & C_n & \\ a_{m,n_m} & & & & & & & \end{pmatrix} \in M_{N+1}(\mathbb{K}), \tag{2.10}$$

$$C_i = \begin{pmatrix} -\gamma_i & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma_i & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & & & -\gamma_i \end{pmatrix} \in M_{n_i+1}(\mathbb{K}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Abweichend von der bisherigen Notation bezeichnet in diesem Kapitel $M_n(R)$, $n \in \mathbb{N}$, die Menge der $(n \times n)$-Matrizen über einem Ring R, zum Beispiel $M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n \times n}$. Als weitere Notation wird $E := (1, \dots, 0)^T \in \mathbb{K}^{N+1}$ benutzt.

Satz 2.3

Zu einem Quasi-Polynom q der Form (1.2) ist die Lösung $x = x(\cdot, \varphi, h)$ der Differentialgleichung (1.3) zu einer Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{G}_q$ auf $\mathbb{R}_+$ gegeben durch die erste Komponente der vektorwertigen Funktion

$$y(t) = e^{D_q t}\left(y(0) + \int_0^t e^{-D_q s} E \, dh(s) \right) \quad \textit{für } t \geqslant 0,$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \tau_1^1(\varphi) \\ \vdots \\ \tau_{n_m+1}^m(\varphi) \end{pmatrix},$$

wobei D_q die zu der Dichte q korrespondierende Matrix in (2.10) bezeichnet.

Beweis: Die Funktion y ist Lösung der Gleichung

$$y(t) = y(0) + \int_0^t D_q y(s)\, ds + Eh(t) \quad \text{für } t \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Für $y(t) = (y_0(t), \ldots, y_N(t))^T$ wird mit $N = n_1 + \cdots + n_m + m$ und $t \geqslant 0$ die Notation

$$\begin{aligned}
y_k^1(t) &:= y_k(t) \quad \text{für } k = 1, \ldots, n_1 + 1,\\
y_k^2(t) &:= y_k(t) \quad \text{für } k = n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2 + 2,\\
&\vdots\\
y_k^m(t) &:= y_k(t) \quad \text{für } k = (n_1 + \cdots + n_{m-1} + m), \ldots, (n_1 + \cdots + n_m + m)
\end{aligned}$$

benutzt. Wegen der Differentialgleichung (2.11) erfüllen diese Funktionen für $k = 1, \ldots, n_i$ und $i = 1, \ldots, m$ sowie $t \geqslant 0$ die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
y_k^i(t) &= y_k^i(0) + \int_0^t \left(a_{i,k-1} y_0(s) - \gamma_i y_k^i(s) - y_{k+1}^i(s)\right)\, ds,\\
y_{n_i+1}^i(t) &= y_{n_i+1}^i(0) + \int_0^t \left(a_{i,n_i} y_0(s) - \gamma_i y_{n_i+1}^i(s)\right)\, ds.
\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind für $t \geqslant 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
y_k^i(t) &= \left(y_k^i(0) - \int_0^t e^{\gamma_i s} y_{k+1}^i(s)\, ds + a_{i,k-1} \int_0^t e^{\gamma_i s} y_0(s)\, ds\right) e^{-\gamma_i t},\\
y_{n_i+1}^i(t) &= \left(y_{n_i+1}^i(0) + a_{i,n_i} \int_0^t e^{\gamma_i s} y_0(s)\, ds\right) e^{-\gamma_i t}.
\end{aligned}$$

Durch sukzessive Auflösung für $k = 1, \ldots, n_i$ und $i = 1, \ldots, m$ sowie $t \geqslant 0$ erhält man:

$$\begin{aligned}
y_k^i(t) &= \sum_{l=0}^{n_i-k+1} y_{k+l}^i \frac{(-t)^l}{l!} + \sum_{l=0}^{n_i-k+1} a_{i,k-1+l} \int_0^t \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_l} e^{\gamma_i s_{l+1}} y_0(s_{l+1})\, ds_{l+1} \ldots ds_1\\
&= \sum_{l=0}^{n_i-k+1} \frac{a_{i,k-1+l}}{l!} \int_{-\infty}^0 \varphi(s)(s-t)^l e^{\gamma_i(s-t)}\, ds\\
&\qquad + \sum_{l=0}^{n_i-k+1} \frac{a_{i,k-1+l}}{l!} \int_0^t y_0(s)(s-t)^l e^{\gamma_i(s-t)}\, ds.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Einsetzen dieser Darstellungen in die Gleichung

$$y_0(t) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t y_1^i(s)\, ds + h(t),$$

die sich aus (2.11) ergibt, zeigt, dass $y_0(t)$ für $t \geqslant 0$ die Gleichung (1.3) erfüllt. $\square$

Zu einem Quasi-Polynom q der Form (1.2) wird die homogene Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_{-\infty}^{0} x(t+s)q(s)\,ds \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x_0 &= \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{G}_q, \end{aligned} \tag{2.13}$$

betrachtet, wobei der Phasenraum $\mathcal{G}_q$ gemäß (2.5) gewählt ist. Es bezeichne $T(t) = T_q(t)$ für $t \geqslant 0$ die Lösungsoperatoren der Gleichung (2.13) sowie $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}_q$ den infinitesimalen Erzeuger von $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t \geqslant 0}$. Satz 2.3 stellt einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen der Lösung $x(\cdot,\varphi) := x(\cdot,\varphi,0)$ der homogenen Gleichung (2.13) und der Matrix (2.10) her. Es liegt nahe, eine Verbindung des infinitesimalen Erzeugers $\hat{\mathrm{A}}_q$ mit der Matrix D_q zu vermuten. Diese ist gegeben durch das folgende Lemma, wobei $\Delta_{L_q}(\cdot)$ die charakteristische Matrix nach Definition 2.4.10 des Operators L_q in (1.4) bezeichnet.

Lemma 2.4
Falls q ein Quasi-Polynom der Form (1.2) ist, so gilt für den infinitesimalen Erzeuger $\hat{\mathrm{A}}_q$ und die Matrix D_q gemäß (2.10)

$$\sigma(D_q) \cap \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{G}_q}} = \{\lambda \in \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{G}_q}} : \Delta_{L_q}(\lambda) = 0\} = \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}_q),$$

wobei die algebraischen Vielfachheiten der Nullstellen und Eigenwerte übereinstimmen.

Beweis: Die zweite Gleichheit folgt aus Satz 2.4.11. Der dort geforderte Schnitt mit $\mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{G}_q}}$ ist wegen $e(\beta_{\mathcal{G}_q}) \notin \mathcal{G}_q$ nach Satz 5.4.3 in [HMN91] vernachlässigbar.
Für den Nachweis der ersten Gleichheit ergibt sich die charakteristische Funktion der Matrix $D_q \in M_{N+1}(\mathbb{K})$ der Form (2.10) mit $N = n_1 + \cdots + n_m + m$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ als:

$$\begin{aligned} &\det[\lambda\,\mathrm{I} - D_q] \\ &= \lambda \prod_{i=1}^{m} (\lambda+\gamma_i)^{n_i+1} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_i} (-1)^{j+1} a_{i,j} (\lambda+\gamma_i)^{n_i-j} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} (\lambda+\gamma_k)^{n_k+1} \right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Andererseits erhält man für $\lambda \in \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{G}_q}}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{L_q}(\lambda) &= \lambda - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{j!} \int_{-\infty}^{0} u^j e^{(\gamma_i+\lambda)u}\,du \\ &= \lambda - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_i} a_{i,j} (-1)^j \frac{1}{(\lambda+\gamma_i)^{j+1}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Eine geeignete faktorielle Erweiterung zeigt die Gleichheit der Nullstellen und deren Vielfachheiten für die Funktionen (2.14) und (2.15). $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass das Punktspektrum eines infinitesimalen Erzeugers der Lösungshalbgruppe einer linearen Differentialgleichung mit unendlichem Gedächtnis nicht die Lösung bestimmt.

Beispiel 2.5 Es sei q ein Quasi-Polynom der Form $q(u) = ae^{\gamma_1 u} + be^{\gamma_2 u}$ mit $a, b, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. Geht man von den Eigenwerten $\lambda_1 = -6$ mit doppelter Vielfachheit und $\lambda_2 = -9$ mit einfacher Vielfachheit der Matrix D_q aus, so folgt aus der charakteristischen Funktion (2.14):

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 21; \quad a = (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}(324 - 144\gamma_1 + \gamma_1^2\gamma_2); \quad b = (\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}(324 - 144\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2^2).$$

Da die Parameter γ_1 und γ_2 nicht eindeutig bestimmt sind, lassen sich leicht Beispiele mit den folgenden daraus resultierenden Relationen des Parameters $\beta = \beta_{\mathcal{G}_q}$ konstruieren:

$$\begin{array}{llcll}
\gamma_1 = 1; & \gamma_2 = 20 & \Rightarrow & \lambda_1,\ \lambda_2 < \beta = -1, & \sigma(D_q) \cap \mathbb{C}_\beta = \emptyset; \\
\gamma_1 = 10; & \gamma_2 = 11 & \Rightarrow & \beta = -10 < \lambda_1,\ \lambda_2, & \sigma(D_q) \subseteq \mathbb{C}_\beta; \\
\gamma_1 = 8; & \gamma_2 = 13 & \Rightarrow & -\lambda_2 < \beta = -8 < \lambda_1, & \sigma(D_q) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_\beta) \neq \emptyset \quad \text{und} \\
 & & & & \quad \sigma(D_q) \cap \mathbb{C}_\beta \neq \emptyset.
\end{array}$$

Die Lösung $x = x(\cdot, \varphi)$ für $\varphi \in \mathcal{G}_q$ der homogenen Gleichung (2.13) zu der jeweiligen Dichte q ist nach Satz 2.3 in allen drei Fällen durch eine Funktion $x(t) = c_1 e^{-9t} + (c_2 + c_3 t)e^{-6t}$ für $t \geqslant 0$ mit $c_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, 2, 3$ gegeben. Nur die Konstanten c_i variieren in den drei Fällen und sind von der Anfangsbedingung φ abhängig.

3 Das inverse Problem

Das *inverse Problem* stellt die Frage nach der Möglichkeit, eine homogene Differentialgleichung mit Gedächtnis zu konstruieren, so dass die Eigenwerte mit Vielfachheiten des infinitesimalen Erzeugers ihrer Lösunghalbgruppe einer vorgegebenen Menge

$$\mathcal{P} := \{(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N} : \ i = 1, \ldots, \xi\}, \quad \xi \in \mathbb{N}, \tag{3.16}$$

entsprechen. Für eine reelle Gleichung mit endlichem Gedächtnis ist dieses Problem in Abschnitt 2.2 in [Put01] behandelt. Da aber das Spektrum des infinitesimalen Erzeugers einer Gleichung mit endlichem Gedächtnis abzählbar unendlich ist, außer im trivialen Fall eines Punktmaßes in 0, kann die endliche Menge $\mathcal{P}$ nur Teilmenge einer Spektralmenge sein. Dies muss für eine Gleichung mit unendlichem Gedächtnis nicht mehr notwendig sein, wie Lemma 2.4 zeigt.
Um den Zugang dieses Abschnittes zur Lösung des inversen Problems zu skizzieren, wird die folgende Definition benötigt:

Definition 3.1
Es seien B, $C \in M_n(R)$, $n \in \mathbb{N}$, Matrizen über einem kommutativen Ring R mit Eins.

a) *Es heißen B und C äquivalent, falls invertierbare Matrizen P, $Q \in M_n(R)$ existieren, so dass*

$$C = P^{-1}BQ.$$

b) *Es heißen B und C ähnlich, in Zeichen $B \sim C$, falls eine invertierbare Matrix $S \in M_n(R)$ existiert, so dass*
$$C = S^{-1}BS.$$

Jordanmatrizen über $\mathbb{C}$ sind Matrizen der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_\xi} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}), \quad J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{v_i}(\mathbb{C}) \qquad (3.17)$$

mit $n = v_1 + \cdots + v_n$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $v_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, \xi$, $\xi \in \mathbb{N}$. In $M_n(\mathbb{C})$ sind Jordanmatrizen eindeutige Repräsentanten der Äquivalenzklassen bezüglich der Ähnlichkeitsrelation (Satz 9.7 in [Lor92]).
Das inverse Problem wird auf folgende Art behandelt. Zunächst wird die Menge aller Jordanmatrizen bestimmt, die die Äquivalenzklassen bezüglich der Ähnlichkeitsrelation angeben, in denen Matrizen der Form (2.10) liegen. Dieser Nachweis ist konstruktiv in dem Sinn, dass explizit Matrizen der Form (2.10) bestimmt werden können, die einer gegebenen Jordanmatrix dieser Menge ähnlich sind. Diese Menge der möglichen Jordanmatrizen erlaubt eine eindeutige Abbildung der Menge $\mathcal{P}$ auf eine Jordanmatrix J mit $\sigma(J) = \mathcal{P}$ und damit auf eine Matrix D_q der Form (2.10) mit demselben Spektrum $\mathcal{P}$. Wegen des Schnittes des Spektrums der Matrizen der Form (2.10) mit der Halbebene $\mathbb{C}_\beta$ in Lemma 2.4 muss die so gefundene Matrix das inverse Problem noch nicht lösen. Dies erfordert einen weiteren Schritt.
Die gesuchte Menge von Jordanmatrizen wird mittels des Determinanten- und Invariantenteilersatzes bestimmt, der äquivalente Bedingungen zur Ähnlichkeit von Matrizen angibt.
Für einen Körper $\mathbb{F}$ bezeichne $\mathbb{F}[\lambda]$ den Ring der Polynome über $\mathbb{F}$. Der größte gemeinsame Teiler (ggT) von Polynomen $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{F}[\lambda]$, die nicht alle gleich 0 sind, bezeichnet dasjenige normierte Polynom aus $\mathbb{F}[\lambda]$ höchsten Grades, welches alle p_i in $\mathbb{F}[\lambda]$ teilt. Sind alle Polynome $p_i = 0$, so wird der ggT als 0 definiert. Teilt ein Polynom $p \in \mathbb{F}[\lambda]$ ein anderes Polynom $q \in \mathbb{F}[\lambda]$ in $\mathbb{F}[\lambda]$, wird die Notation $p|q$ benutzt. Für ein Polynom $p \in \mathbb{F}[\lambda]$ wird $\kappa \in \mathbb{F}$ Normierungskonstante genannt, falls $\kappa\, p$ ein normiertes Polynom ist.

Definition 3.2
Es sei $P \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$ eine Matrix über dem Ring der Polynome über $\mathbb{F}$. Der j-te Determinantenteiler *der Matrix P ist gegeben als*

$$d_j(P) := ggT(\det[P_1(j)], \ldots, \det[P_{v_j}(j)]) \in \mathbb{F}[\lambda],$$

wobei durch $P_i(j)$ die Untermatrizen der Ordnung j von P für $i = 1, \ldots, v_j := \binom{n}{j}^2$ bezeichnet werden.

Beispiel 3.3 Für eine Matrix $P = (p_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$ ist

$$d_1(P) = \mathrm{ggT}(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}) \quad \text{und} \quad d_n(P) = \kappa \det[P] \quad \text{mit } \kappa \in \mathbb{F}\,.$$

Definition 3.2 bezieht sich auf Matrizen über einem Polynomring. Für Matrizen über Körpern, etwa mit reellen oder komplexwertigen Einträgen, werden die Determinantenteiler durch Übergang zu der charakterischen Matrix definiert:

Definition 3.4
Es sei $B \in M_n(\mathbb{F})$ eine Matrix über einem Körper $\mathbb{F}$. Mit dem j-ten Determinantenteiler *der Matrix B wird bezeichnet*

$$d_j(B) := d_j(\lambda\,\mathrm{I}_n - B) \in \mathbb{F}[\lambda] \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

In engem Zusammenhang zu den Determinantenteilern stehen die Invariantenteiler, die durch den folgenden Satz definiert werden.

Satz 3.5 (Invariantenteilersatz)
Es sei $P \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$ eine Matrix über dem Ring der Polynome über $\mathbb{F}$. Dann ist P äquivalent zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \ldots & c_n \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

mit Diagonalgliedern $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}[\lambda]$, welche die Bedingung $c_i | c_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ erfüllen. Bis auf Einheiten von $\mathbb{F}[\lambda]$ sind die Elemente $c_1, \ldots, c_n$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Siehe 9.3 in [Lor92]. □

Definition 3.6
Es sei $B \in M_n(\mathbb{F})$ eine Matrix über einem Körper $\mathbb{F}$. Der j-te Invariantenteiler *der Matrix B ist gegeben als*

$$c_j(B) := c_j(\lambda\,\mathrm{I}_n - B) \in \mathbb{F}[\lambda] \quad \text{für } j = 1, \ldots, n,$$

wobei $c_j(\lambda\,\mathrm{I}_n - B)$ die Diagonalelemente der Matrix $(\lambda\,\mathrm{I}_n - B) \in \mathbb{F}[\lambda]$ in der Darstellung (3.18) nach Satz 3.5 bezeichnet.

Bemerkung 3.7 Für äquivalente Matrizen in $M_n(\mathbb{F}[\lambda])$ stimmen die Determinantenteiler überein (siehe Seite 150 in [Lor92]). Deshalb folgt aus Satz 3.5 für eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{F})$:

$$d_j(B) = \kappa_j\, c_1(B) \ldots c_j(B) \qquad \text{mit } \kappa_j \in \mathbb{F} \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Man erhält $d_j(B) | d_{j+1}(B)$ in $\mathbb{F}[\lambda]$ für $j = 1, \ldots, n-1$.

Die Determinanten- und Invariantenteiler erlauben, äquivalente Bedingungen für die Ähnlichkeit zweier Matrizen anzugeben.

Satz 3.8 (Determinantenteilersatz)
Für zwei Matrizen B, $C \in M_n(\mathbb{F})$ gilt:

a) $B \sim C \iff c_j(B) = c_j(C)$ *für alle* $j = 1, \ldots, n$.

b) $B \sim C \iff d_j(B) = d_j(C)$ *für alle* $j = 1, \ldots, n$.

Beweis: Siehe Satz 9.4 in [Lor92]. □

In den beiden folgenden Sätzen werden die Jordanmatrizen bestimmt, die die Äquivalenzklassen bezüglich der Ähnlichkeitsrelation angeben, in denen Matrizen D_q der Form (2.10) liegen. Zunächst beschränken wir uns auf Matrizen, die zu einem einfachen Quasi-Polynom q_1 der Form (1.1) korrespondieren:

$$D_{q_1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_0 & -\gamma & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ a_n & & & & -\gamma \end{pmatrix} \in M_{n+2}(\mathbb{C}), \quad a_0, \ldots, a_n, \gamma \in \mathbb{C}\,. \tag{3.19}$$

Man beachte, dass für die Matrix D_{q_1} in (3.19) nicht $a_n \neq 0$ vorausgesetzt ist, wie es für die Dichte q_1 der Fall ist.

Satz 3.9
Es sei $D_{q_1} \in M_{n+2}(\mathbb{C})$ eine Matrix der Form (3.19) mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_\xi$ der algebraischen Vielfachheiten v_i. Dann gilt

$$D_{q_1} \sim J,$$

wobei J eine Jordanmatrix der folgenden Form ist:

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_\xi} \end{pmatrix} \in M_{n+2}(\mathbb{C}), \qquad \begin{array}{l} J_{\lambda_i} \in M_{v_i}(\mathbb{C}) \quad \text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j, \\ \qquad\qquad i = 1, \ldots, \xi\,. \end{array} \tag{3.20}$$

Umgekehrt existiert für jede Jordanmatrix der Form (3.20) genau eine Matrix D_{q_1} der Form (3.19), so dass $D_{q_1} \sim J$ erfüllt ist.

Beweis: Durch Streichen der letzten Zeile und ersten Spalte der charakteristischen Matrix $\lambda\,\mathrm{I} - D_{q_1}$ von D_{q_1} erkennt man $d_{n+1}(\lambda\,\mathrm{I} - D_{q_1}) = 1$ und es folgt

$$d_j(\lambda\,\mathrm{I} - D_{q_1}) = 1 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n+1, \tag{3.21}$$

da Determinantenteiler nach Bemerkung 3.7 Teiler voneinander sind. Aufgrund der Gleichheit $d_{n+2}(D_{q_1}) = \kappa \det[\lambda\,\mathrm{I} - D_{q_1}]$ mit $\kappa \in \mathbb{C}$ nach Beispiel 3.3 gilt:

$$d_{n+2}(\lambda\,\mathrm{I} - D_{q_1}) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} \dots (\lambda - \lambda_\xi)^{v_\xi}.$$

Andererseits besitzen wegen der paarweis verschiedenen Eigenwerte Jordanmatrizen der Form (3.20) die Determinantenteiler:

$$\begin{aligned} d_j(J) &= 1 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n+1, \\ d_{n+2}(J) &= (\lambda - \lambda_1)^{v_1} \dots (\lambda - \lambda_\xi)^{v_\xi}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

woraus mit Satz 3.8 die erste Behauptung folgt.
Ist umgekehrt eine Jordanmatrix $J \in M_{n+2}(\mathbb{C})$ der Form (3.20) gegeben, stimmen deren Determinantenteiler $d_j(J)$ mit denen jeder beliebigen Matrix $D_{q_1} \in M_{n+2}(\mathbb{C})$ der Form (3.19) für $j = 1, \dots, n+1$ nach (3.21) und (3.22) überein. Es bleibt nach Satz 3.8 zu zeigen, dass genau eine Matrix $D_{q_1} \in M_{n+2}(\mathbb{C})$ der Form (3.19) existiert, die dasselbe charakteristische Polynom wie die Jordanmatrix J besitzt, das gegeben sei durch:

$$d_{n+2}(J) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} \dots (\lambda - \lambda_\xi)^{v_\xi} =: \sum_{i=0}^{n+2} u_i \lambda^i \quad \text{für } u_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \dots, n+2. \tag{3.23}$$

Für das charakteristische Polynom einer beliebigen (n+2)-dimensionalen Matrix D_{q_1} der Form (3.19) erhält man mit (2.14) für $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &\det[\lambda\,\mathrm{I} - D_{q_1}] \\ &\quad = \lambda^{n+2} + (n+1)\gamma\lambda^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n+1}{j-1} \gamma^{n+2-j} + \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} (-1)^{n+1-i} a_{n-i} \gamma^{i-j} \right) \lambda^j \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+1-i} a_{n-i} \gamma^i. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit $d_{n+2}(J)$ in (3.23) liefert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (n+1)\gamma &= -(v_1\lambda_1 + \dots + v_\xi\lambda_\xi), \\ \frac{1}{2} n(n+1)\gamma^2 - a_0 &= u_n, \\ \binom{n+1}{n-k-1} \gamma^{k+2} + \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{n-k} (-1)^{i+1} a_i \gamma^{k-i} &= u_{n-k}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+1-i} a_{n-i} \gamma^i &= u_0, \end{aligned} \tag{3.24}$$

das eine eindeutige Auflösung nach den Parametern $\gamma, a_0 \dots, a_n$ erlaubt. $\square$

Jordanmatrizen der Form (3.20) werden im Folgenden als *volle Jordanmatrizen* bezeichnet.

Bemerkung 3.10 a) Jordanmatrizen der Form (3.20) sind eine echte Teilmenge aller Jordanmatrizen, da in der Darstellung (3.17) keine Jordanblöcke J_{λ_i} und J_{λ_j} mit $\lambda_i = \lambda_j$ für $i \neq j$ auftreten können.

b) Volle Jordanmatrizen lassen sich nicht nur durch ihre Form charakterisieren. Es sind nämlich gerade die Jordanmatrizen, deren Minimalpolynom und charakteristisches Polynom übereinstimmen.

Bemerkung 3.11 Die Matrix D_{q_1} in Satz 3.9 ist genau dann reell, falls in (3.20) gilt:

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, \widetilde{\xi}, \quad \lambda_i = \overline{\lambda}_{i+1}, \quad v_i = v_{i+1}, \quad i = \widetilde{\xi} + 1, \dots, \xi - 1, \tag{3.25}$$

für ξ, $\widetilde{\xi} \in \mathbb{N}$, wobei die Indizierung der Eigenwerte ohne Einschränkung in dieser Reihenfolge angenommen werden kann.
Die Begründung liefert das Gleichungssystem (3.24).

Der folgende Satz gibt die Menge der Jordanmatrizen an, die zu Matrizen der allgemeinen Form (2.10) ähnlich sind.

Satz 3.12
Jede Matrix $D \in M_{N+1}(\mathbb{C})$ der Form (2.10) ist ähnlich einer vollen Jordanmatrix $J \in M_{N+1}(\mathbb{C})$ der Form (3.20).

Beweis: Es sei $P \in M_N(\mathbb{C}[\lambda])$ die Streichungsmatrix von $\lambda\,\mathrm{I} - D$, die man durch Streichung der ersten Zeile und ersten Spalte erhält. Die Matrix P besitzt die Determinante

$$\det[P] = (\lambda + \gamma_1)^{n_1+1} \dots (\lambda + \gamma_m)^{n_m+1} \in \mathbb{C}[\lambda].$$

Unter der Annahme, die Matrix D sei nicht ähnlich zu einer vollen Jordanmatrix, folgt wegen (3.22) für den N-ten Determinantenteiler $p(\lambda) := d_N(\lambda\,\mathrm{I} - D) \neq 1$. Da jedoch der N-te Determinantenteiler $d_N(\lambda\,\mathrm{I} - D)$ gemäß Definition 3.2 die Determinante $\det[P]$ in $\mathbb{C}[\lambda]$ teilt und nicht gleich 0 ist sowie die Faktoren $(\lambda + \gamma_i)$ irreduzible Elemente in $\mathbb{C}[\lambda]$ sind, folgt

$$\exists\, l \in \{1, \dots, m\} : \; p_l \;\mid p \quad \text{mit } p_l(\lambda) := \lambda + \gamma_l \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Da desweiteren der N-te Determinantenteiler p nach Bemerkung 3.7 die Determinante

$\det[\lambda\,\mathrm{I} - D]$ der charakteristischen Matrix von D in $\mathbb{C}[\lambda]$ teilt, erhält man mit (2.14)

$$(\lambda+\gamma_l) \;\mid\; \lambda\prod_{i=1}^{m}(\lambda+\gamma_i)^{n_i+1} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_i}(-1)^{j+1}a_{i,j}(\lambda+\gamma_i)^{n_i-j}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}(\lambda+\gamma_k)^{n_k+1}\right)$$

$$\Rightarrow\; (\lambda+\gamma_l) \;\mid\; \left(\sum_{j=0}^{n_l}(-1)^{j+1}a_{l,j}(\lambda+\gamma_l)^{n_l-j}\right)\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{m}(\lambda+\gamma_k)^{n_k+1}\right)$$

$$\Rightarrow\; (\lambda+\gamma_l) \;\mid\; \sum_{j=0}^{n_l}(-1)^{j+1}a_{l,j}(\lambda+\gamma_l)^{n_l-j},$$

wobei die Terme jeweils als Polynome in $\mathbb{C}[\lambda]$ zu verstehen sind. Es folgt $p_l \mid a_{l,n_l}$, was den Widerspruch $\operatorname{grad} p_l = 0$ wegen $a_{l,n_l} \neq 0$ impliziert. □

Bemerkung 3.13 In Analogie zu Gleichungssystem (3.24) lässt sich auch für eine Matrix D der allgemeinen Form (2.10) ein Gleichungssystem aufstellen, das die Relation zwischen den Parametern des zugrunde liegenden Quasi-Polynoms und dem Spektrum der Matrix D beschreibt. Im Gegensatz zu (3.24) wird dadurch keine eindeutige Auflösung nach den Parametern des Quasi-Polynoms erzwungen, falls von mehr als einem Exponentialparameter des Quasi-Polynoms ausgegangen wird. Diese Eigenschaft wird in Beispiel 2.5 ausgenutzt.

Korollar 3.14
Jede Matrix D der Form (2.10) *ist genau zu einer Matrix D_{q_1} der Form* (3.19) *ähnlich.*

Beweis: Folgt aus den Sätzen 3.9 und 3.12. □

Bemerkung 3.15 a) Nach Korollar 3.14 wird eine beliebige Matrix $D \in M_{N+1}(\mathbb{C})$ der Form (2.10) eindeutig durch eine Matrix $D_{q_1} \in M_{n+2}(\mathbb{C})$ der Form (3.19) mit $n = N-1$ repräsentiert, jedoch kann $a_n = 0$ in der Darstellung der Matrix D_{q_1} auftreten. Erst durch Reduktion der Dimension dieser Matrix erhält man ein korrespondierendes einfaches Quasi-Polynom, das exakt Definition 1.1 entspricht.

b) Korollar 3.14 offenbart eine gewisse Redundanz bei der Modellierung einer homogenen Gleichung, deren Vergangenheit durch ein allgemeines Quasi-Polynom q der Form (1.2) statt mit einem einfachen Quasi-Polynom der Form (1.1) mit nur einem Exponentialparameter gewichtet ist. Denn die Matrix D der Form (2.10), die zu dem allgemeinen Quasi-Polynom q korrespondiert, ist ähnlich zu einer Matrix D_{q_1} der Form (3.19), die nach einer eventuellen Reduktion der Dimension zu einem einfachen Quasi-Polynom q_1 der Form (1.1) korrespondiert. Das ursprüngliche Gleichungssystem $\dot{y} = Dy$ kann durch eine nicht-singuläre Matrix S zu $Sy = D_{q_1}\,Sy$ transformiert werden.

Nach Satz 3.9 kann die Menge $\mathcal{P}$ in (3.16) durch das Gleichungssystem (3.24) auf die Matrix D_{q_1} der Form (3.19) mit $\sigma(D_{q_1}) = \mathcal{P}$ abgebildet werden, zu der ein Quasi-Polynom q_1 korrespondiert. Bezeichnet β den Parameter des Phasenraumes $\mathcal{G}_{q_1}$, so gilt im Allgemeinen $\mathcal{P} \cap \mathbb{C}_\beta \neq \mathcal{P}$ und das inverse Problem ist wegen Lemma 2.4 noch nicht gelöst. Den letzten Schritt gibt der nachfolgende Satz an:

Satz 3.16
Es sei eine Menge $\mathcal{P} := \{(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N} \;\; \text{für } i = 1, \dots, \xi, \;\; \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j\}$ *mit* $v := v_1 + \cdots + v_\xi \geqslant 2$ *gegeben. Es gilt:*

a) *es existieren* $s \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{N}$ *und ein Quasi-Polynom* $q_1(u) = \sum_{j=0}^{v+w-2} \frac{a_j}{j!} u^j e^{\gamma u}$, *so dass für die korrespondierende Matrix* $D_{q_1} \in M_{v+w}(\mathbb{C})$ *der Dichte* q_1 *gilt:*

$$\begin{aligned} &\sigma(D_{q_1}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_\xi\} \cup \{s\} \quad \text{mit Vielfachheiten } v_1, \dots, v_\xi \text{ und } w, \\ &s < -\mathit{Re}\, \gamma < \min\{\mathit{Re}\, \lambda_1, \dots, \mathit{Re}\, \lambda_\xi\}. \end{aligned}$$

b) *es existiert ein Quasi-Polynom* $q_1(u) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j!} u^j e^{\gamma u}$, $n \in \mathbb{N}$, *so dass für den infinitesimalen Erzeuger* $\hat{\mathrm{A}}_{q_1}$ *auf* $\mathcal{G}_{q_1}$ *gilt:*

$$\sigma_P(\hat{\mathrm{A}}_{q_1}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_\xi\} \quad \text{mit Vielfachheiten } v_1, \dots, v_\xi.$$

c) *ist die Menge* $\mathcal{P}$ *gemäß* (3.25) *gegeben, so ist in a und b die Dichte* q_1 *reell.*

Beweis:

a) Für zunächst beliebige $w \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{R}$ sei $J \in M_{v+w}(\mathbb{C})$ eine Jordanmatrix der folgenden Form:

$$J = \begin{pmatrix} J_s & & & \\ & J_{\lambda_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_\xi} \end{pmatrix} \qquad \text{mit Jordanblöcken } J_{\lambda_i} \in M_{v_i}(\mathbb{C}), \; J_s \in M_w(\mathbb{C}).$$

Zu konstruieren ist eine Matrix $D_{q_1} \in M_{v+w}(\mathbb{C})$ der Form (3.19), so dass diese ähnlich zu der Jordanmatrix J ist und den Bedingungen der Aussage a genügt. Für den Exponentialparameter γ der Dichte q_1 impliziert das Gleichungssystem (3.24) die folgende Gleichung mit Nebenbedingungen:

$$\begin{gathered} (v + w - 1)\gamma = -(v_1\lambda_1 + \cdots + v_\xi\lambda_\xi + ws) \\ s < -\mathrm{Re}\, \gamma < \min\{\mathrm{Re}\, \lambda_1, \dots, \mathrm{Re}\, \lambda_\xi\} \end{gathered} \tag{3.26}$$

Durch die Wahl des Parameters s mit

$$0 < \delta := \min\{\mathrm{Re}\, \lambda_1, \dots, \mathrm{Re}\, \lambda_\xi\} - s \quad \text{und} \quad s < \tfrac{v}{v-1} \min\{\mathrm{Re}\, \lambda_1, \dots, \mathrm{Re}\, \lambda_\xi\}$$

sowie

$$w > \frac{1}{\delta}(v_1 \mathrm{Re}\,\lambda_1 + \cdots + v_\xi \mathrm{Re}\,\lambda_r - (v-1)\min\{\mathrm{Re}\,\lambda_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\lambda_\xi\}) \text{ und } w \in \mathbb{N},$$
$$\gamma = \frac{-1}{v+w-1}(v_1\lambda_1 + \cdots + v_\xi\lambda_\xi + ws),$$

ist (3.26) erfüllt. Die Parameter $a_0, \ldots, a_{v+w-2} \in \mathbb{C}$ werden durch das Gleichungssystem (3.24) bestimmt.

b) Die Aussage folgt aus Aussage a mit den Lemmata 2.2 und 2.4.

c) Ergibt sich aus Bemerkung 3.11. □

Die Lösung des inversen Problems eröffnet einen Ansatz, um von der Lösung einer Gleichung mit unendlichem Gedächtnis durch Schätzung des assoziierten Punktspektrums Kenntnis über die zugrunde liegende Gewichtung der Vergangenheit zu erlangen. Wegen der Ergebnisse des Kapitels 7, wonach die Lösung einer affinen Gleichung mit beliebig gewichteter Vergangenheit approxmiert werden kann durch die Lösung einer quasi-polynomiell gewichteten Gleichung, kann bei der Entwicklung solch eines Verfahrens von der Lösung einer Gleichung mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit ausgegangen werden.

4 Reduzierbare stochastische Differentialgleichungen

Wird die deterministische Störfunktion h der Differentialgleichung (1.3) durch einen Wiener-Prozess W ersetzt, erhält man eine affine stochastische Differentialgleichung, wie sie in Kapitel 4.2 behandelt wird. Der dort eingeführte stochastische Rahmen wird im Folgenden vorausgesetzt.
Man betrachtet zu einem Quasi-Polynom q der Form (1.2) die stochastische Gleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\int_{-\infty}^{0} X(t+s)q(s)\,ds\right)dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ X_0 &= \Phi \end{aligned} \tag{4.27}$$

mit einer $\mathcal{F}_0$-messbaren, $\mathcal{G}_q$-wertigen Zufallsvariablen Φ. Wegen des pfadweisen Zuganges in Abschnitt 4.2 sind die bisherigen Resultate dieses Kapitels anwendbar auf die stochastische Gleichung (4.27).
Zu einem Quasi-Polynom q der Form (1.2) und einem $\mathcal{F}_0$-messbaren Zufallsvektor Y_0 bezeichne $\mathbf{Y}_q(\cdot, Y_0)$ den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$\mathbf{Y}_q(t, Y_0) = e^{D_q t}\left(Y_0 + \int_0^t e^{-D_q s}E\,dW(s)\right) \quad \text{für } t \geqslant 0, \tag{4.28}$$

wobei D_q die zu der Dichte q korrespondierende Matrix gemäß (2.10) bezeichnet. Nach (5.6.6) in [KS91] ist der Prozess $\boldsymbol{Y}_q(\cdot, Y_0)$ Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d\,\boldsymbol{Y}(t) &= D_q\,\boldsymbol{Y}(t)\,dt + E\,dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ \boldsymbol{Y}(0) &= Y_0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Falls $\mathbb{E}\,|Y_0|^2 < \infty$ gilt, ist nach Problem 5.6.1 in [KS91] die Kovarianzmatrix des Prozesses $\boldsymbol{Y}(t) := \boldsymbol{Y}_q(t, Y_0)$ für $t \geqslant 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} V_q(t) :&= \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{Y}(t) - \mathbb{E}[\boldsymbol{Y}(t)])\,(\boldsymbol{Y}(t) - \mathbb{E}[\boldsymbol{Y}(t)])^T\right] \\ &= e^{tD_q}\left(V_q(0) + \int_0^t e^{-sD_q} E E^T e^{-sD_q^T}\,ds\right) e^{tD_q^T}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Die Lösung $X(t, \Phi)$ der Gleichung (4.27) ist nach Satz 2.3 für $t \geqslant 0$ durch die erste Komponente des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses $\boldsymbol{Y}_q(t, \tau(\Phi))$ gegeben, wobei der Anfangswert $\tau(\Phi)$ durch den in (2.8) eingeführten Operator τ definiert ist. Wegen der Stetigkeit von τ ist $\tau(\Phi)$ $\mathcal{F}_0$-messbar und $\mathbb{E}\,\|\Phi\|_{\mathcal{G}}^2 < \infty$ impliziert $\mathbb{E}\,|\tau(\Phi)|^2 < \infty$.
Der Zusammenhang zwischen der Lösung der Gleichung (4.27) und dem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist sogar noch enger, wie das folgende Resultat zeigt.

Satz 4.1
Es seien q ein Quasi-Polynom der Form (1.2) mit $q \in L^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ und Φ eine $\mathcal{G}_q$-wertige Zufallsvariable. Dann gilt für die Lösung $X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung (4.27) und den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $\boldsymbol{Y}_q(\cdot, \tau(\Phi))$ in (4.28):

$$\{X(t, \Phi),\, t \in \mathbb{R}\} \text{ stationär } \iff \{\boldsymbol{Y}_q(t, \tau(\Phi)),\, t \geqslant 0\} \text{ stationär}.$$

Beweis: Es sei $X(\cdot) = X(\cdot, \Phi)$ stationär. Da der Phasenraum $\mathcal{G}_q$ die Funktion $\psi(u) := \mathbb{1}_{\{0\}}(u)$ für $u \leqslant 0$ enthält, ist die Differential-Resolvente r von $q(u)\,du$ nach Satz 2.3 für $t \geqslant 0$ durch die erste Komponente der vektorwertigen Funktion $N(t) := e^{D_q t}\tau(\psi)$ mit der Matrix D_q gemäß (2.10) gegeben. Für $N(t) := (r(t), N_1^1(t), \ldots, N_{n_m+1}^m(t))^T$ gilt nach (2.12) für $t \geqslant 0$:

$$N_k^i(t) = \sum_{j=0}^{n_i-k+1} \frac{a_{i,j+k-1}}{j!} \int_{-t}^0 s^i e^{\gamma_i s} r(s+t)\,ds, \quad k = 1, \ldots, n_i + 1,\ i = 1, \ldots, m.$$

Nach Satz 4.3.9 gilt $r \in L^2(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ und aus Satz 3.2.7 folgt $r \in L^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$. Gemäß Lemma 2.1.b ist der Phasenraum $\mathcal{G}_q$ von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis und Bemerkung 4.3.7 impliziert für $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t, \Phi) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_{-\infty}^t r(t-s)\,dW(s) \tag{4.31}$$

mit einem Wiener-Prozess W auf $\mathbb{R}$ gemäß (4.3.18). Wie in Lemma 4.3.3 zeigt man, dass die sich dadurch ergebende Anfangsbedingung

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} r(u-s)\, dW(s) \quad \text{für } u \leqslant 0 \tag{4.32}$$

eine $\mathcal{G}_q$-wertige Zufallsvariable ist. Für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $\boldsymbol{Y}_q(t, \tau(\Phi))$ gilt nach (2.12) P-f.s. für $t \geqslant 0$:

$$\boldsymbol{Y}_q(t, \tau(\Phi)) = \begin{pmatrix} X(t) \\ \tau_1^1(X_t) \\ \vdots \\ \tau_{n_m+1}^m(X_t) \end{pmatrix}.$$

Mit (4.31) und der Formel (4.2.13) der partiellen Integration folgt für $k = 1, \dots, n_i + 1$ und $i = 1, \dots, m$ sowie für $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\tau_k^i(X_t) &= \sum_{j=0}^{n_i-k+1} \frac{a_{i,j+k-1}}{j!} \int_{-\infty}^{0} s^j e^{\gamma_i s} X(t+s)\, ds \\
&\overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{j=0}^{n_i-k+1} \frac{a_{i,j+k-1}}{j!} \int_{-\infty}^{0} s^j e^{\gamma_i s} \left(W(t+s) + \int_{-\infty}^{t+s} \dot{r}(t+s-u) W(u)\, du \right) ds \\
&= \sum_{j=0}^{n_i-k+1} \frac{a_{i,j+k-1}}{j!} \int_{-\infty}^{t} \left((u-t)^j e^{\gamma_i (u-t)} + \int_{u-t}^{0} s^j e^{\gamma_i s} \dot{r}(t-u+s)\, ds \right) W(u)\, du \\
&= \sum_{j=0}^{n_i-k+1} \frac{a_{i,j+k-1}}{j!} \int_{-\infty}^{t} -\frac{d}{du} \left[\int_{u-t}^{0} s^j e^{\gamma_i s} r(t+s-u)\, ds \right] W(u)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{t} N_k^i(t-u)\, dW(u).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Man erhält für $v \geqslant 0$ und $t \geqslant 0$:

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{Y}_q(t, \tau(\Phi)) (\boldsymbol{Y}_q(t+v, \tau(\Phi)))^T \right] = \int_{-\infty}^{0} N(-u)(N(v-u))^T\, du. \tag{4.34}$$

Nach Definition der Abbildung τ ist $\tau(\Phi)$ eine normalverteilte Zufallsvariable und aus (4.33) folgt $\mathbb{E}[\tau(\Phi)] = 0$, so dass (4.34) die Stationarität von $\boldsymbol{Y}_q(\cdot, \tau(\Phi))$ impliziert. Die Umkehrung folgt unmittelbar aus der Stationarität des Prozesses $\boldsymbol{Y}_q(\cdot, \tau(\Phi))$. □

Unbeantwortet bleibt zunächst in Satz 4.1 die Frage, ob eine stationäre Lösung $X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung (4.27) existiert, falls $\boldsymbol{Y}_q(\cdot, Y_0)$ eine stationäre Lösung der Differentialgleichung (4.29) zu einer beliebigen Anfangsbedingung Y_0 ist. Für die positive Beantwortung dieser Frage im Folgenden beschränken wir uns auf die Darstellung im Fall

eines einfachen Quasi-Polynoms, da wir für den allgemeinen Fall eines beliebigen Quasi-Polynoms nur einen Nachweis mit einer langwierigen Bestimmung einer Determinanten kennen.
Selbst für eine normalverteilte Zufallsvariable Y_0 kann eine Komponente des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses $\boldsymbol{Y}_q(\cdot, Y_0)$ deterministisch sein, was äquivalent zur Singularität der Kovarianzmatrix $V_q(t)$ in (4.30) für ein $t \geqslant 0$ ist. Dies wird im folgenden Lemma ausgeschlossen:

Lemma 4.2
Für ein einfaches Quasi-Polynom q der Form (1.1) ist die Kovarianzmatrix $V_q(t)$ in (4.30) des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses $\boldsymbol{Y}_q(\cdot, Y_0)$ für jede normalverteilte Anfangsbedingung Y_0 nicht-singulär.

Beweis: Es sei $D_q \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ die Matrix gemäß (3.19), die zu q korrespondiert. Nach Proposition 5.6.5 in [KS91] ist zu zeigen:

$$\operatorname{rang}\{E, DE, \ldots, D^{n+1}E\} = n+2. \tag{4.35}$$

Die Determinante dieser Matrix kann mit der Zerlegung $D = \widetilde{D} + N$ mit

$$\widetilde{D} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_0 & -\gamma & & & 0 \\ a_1 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_n & 0 & \ldots & & -\gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Da $\widetilde{D}N^i\widetilde{D}E = c_1\widetilde{D}E - c_2N^i\widetilde{D} - c_2E$ mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und $i \in \mathbb{N}$ gilt, lässt sich induktiv für $k = 1, \ldots, n+1$ nachweisen:

$$D^kE = a_kE + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,k}N^i\widetilde{D}E, \quad c_{i,k} \in \mathbb{R}, \quad c_{k-1,k} = 1.$$

Die aus dieser Darstellung resultierenden linearen Abhängigkeiten der Summanden in den Spalten der Matrix in (4.35) implizieren für die Determinante:

$$\begin{aligned} \det\left[E, DE, \ldots, D^{n+1}E\right] &= \det\left[E, \widetilde{D}E, N\widetilde{D}E, N^2\widetilde{D}E, \ldots, N^n\widetilde{D}E\right] \\ &= a_n^{n+1}, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Zeile aus der einfachen Struktur der Matrix ergibt. Da $a_n \neq 0$ vorausgesetzt ist, folgt die Aussage in (4.35). □

Die Nicht-Singularität der Kovarianzmatrix erlaubt die Aussage des Satzes 4.1 dahingehend zu verallgemeinern, dass bereits die Existenz stationärer Lösungen für die Gleichungen (4.29) und (4.27) äquivalent sind. Dieses Resultat ist für Anwendungen von großer Bedeutung, denn die Existenz einer stationären Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (4.29) lässt sich durch ein notwendiges und hinreichendes Kriterium numerisch leicht überprüfen, das die Aussage c im folgenden Korollar ist:

Korollar 4.3
Es sei $q \in L^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ ein einfaches Quasi-Polynom der Form (1.1) und D_q die korrespondierende Matrix (2.10). Dann sind äquivalent:

a) *es existiert eine stationäre Lösung der Gleichung (4.27);*

b) *es existiert eine stationäre Lösung der Gleichung (4.29);*

c) $\sigma(D_q) \cap \overline{\mathbb{C}}_0 = \emptyset$.

Beweis: Da nach Lemma 4.2 der Ornstein-Uhlbenbeck-Prozess $\boldsymbol{Y}_q(\cdot, Y_0)$ zu einem beliebigen Anfangswert Y_0 nicht-singulär ist, folgt aus Satz 6.2 in [Jac91] die Äquivalenz der Aussagen b und c.
Falls die Aussage a gilt, so folgt analog zu dem Beweis von Satz 4.1, dass die Anfangsbedingung, die die stationäre Lösung erlaubt, eine $\mathcal{G}_q$-wertige Zufallsvariable ist; siehe auch Bemerkung 4.3.12. Dadurch folgt Aussage b aus Satz 4.1.
Aus Aussage c folgt nach Satz 2.3 für die Differential-Resolvente r des Maßes $q(u)\,du$ die Integrierbarkeit $r \in L^p(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ für jedes $p \geqslant 1$. Nach Satz 4.3.4 existiert eine stationäre Lösung der Gleichung (4.27). □

Bemerkung 4.4 Die stationäre Lösung $X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung (4.27) ist nach (4.32) gegeben zu einer Anfangsbedingung

$$\Phi := \{\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} r(u-s)\,dW(s),\, u \leqslant 0\}$$

mit der Differential-Resolvente r von $q(u)\,du$ und einem Wiener-Prozess W auf $\mathbb{R}$ gemäß (4.3.18).
Die stationäre Lösung $\boldsymbol{Y}_q(\cdot, Y_0)$ der Gleichung (4.29) erfordert nach Satz 6.6.7 in [KS91] eine normalverteilte Anfangsbedingung Y_0 mit

$$\mathbb{E}[Y_0] = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_0] = \int_0^{\infty} e^{sD_q} E E^T e^{sD_q^T}\, ds.$$

Man erhält aus dem Beweis zu Satz 4.1 die Gleichheit $\tau(\Phi) \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y_0$.

Endliches Gedächtnis 4.5 Zu dem Quasi-Polynom $q(u) = ae^{\gamma u}$, $u \leqslant 0$, für $a \in \mathbb{R}$ und $\gamma > 0$ werden affine, stochastische Differentialgleichungen mit unendlichem und

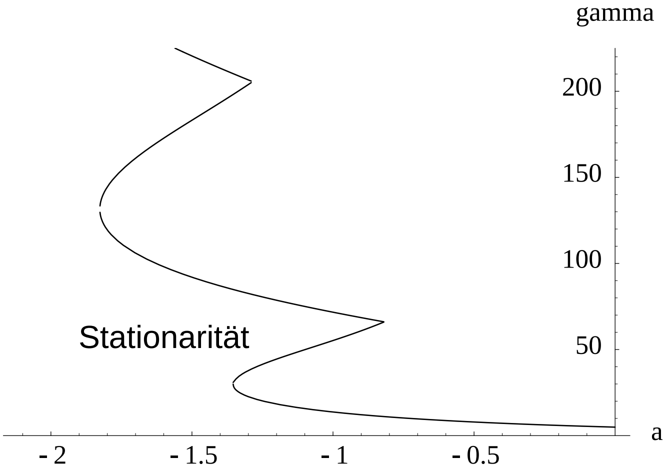

Abbildung 5.1: Stationaritätsgebiet der Gleichung (4.37)

endlichem Gedächtnis der Länge 1 betrachtet:

$$dX(t) = \left(\int_{-\infty}^{0} X(t+u) q(u)\, du \right) dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \tag{4.36}$$

$$dZ(t) = \left(\int_{-1}^{0} Z(t+u) q(u)\, du \right) dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0. \tag{4.37}$$

Die Eigenwerte der Matrix $D_q \in M_2(\mathbb{R})$, die zu der Dichte q korrespondiert, haben genau dann negativen Realteil, falls $(\gamma, a) \in S := \{(g, b) : g > 0 \text{ und } b < 0\}$. Nach Korollar 4.3 besitzt die Differentialgleichung (4.36) mit unendlichem Gedächtnis genau eine stationäre Lösung, falls die Parameter (γ, a) der Dichte q in S liegen. Auch für die Gleichung (4.37) kann das Stationaritätsgebiet – mit einer weitaus weniger einfachen Struktur – bestimmt werden. Abbildung 5.1 zeigt das Stationaritätsgebiet der Gleichungen (4.37), das nur einen Teil der Ebene S einnimmt.

Kapitel 6

Lyapunov-Exponenten

Für die Lösung $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ einer affinen stochastischen Differentialgleichung mit unendlichem Gedächtnis der Form (4.2.8) werden die pfadweisen Lyapunov-Exponenten $\log \|X_t\|_{\mathcal{B}}/t \quad$ für $t \to \infty$ betrachtet. Dazu weisen wir ein allgemeines Resultat in Satz 4.1 für die analogen deterministischen Differentialgleichungen nach. In Abhängigkeit von der Anfangsbedingung wird entweder der Grenzwert oder eine obere Abschätzung des obersten Häufungspunktes des Lyapunov-Exponenten für $t \to \infty$ angegeben. Das Ergebnis wird in einer typischen Situation auf die stochastische Gleichung in Satz 5.2 angewendet. Auf einer Menge der Wahrscheinlichkeit eins entfällt hierbei die notwendige Unterscheidung der Anfangsbedingungen und der Lyapunov-Exponent existiert als pfadweiser Grenzwert für $t \to \infty$.

Wegen des axiomatisch beschriebenen Phasenraumes $\mathcal{B}$ ist kein direkter Zugang möglich, um den Lyapunov-Exponenten abzuschätzen. Deshalb entwickeln wir eine Darstellung des Lösungssegmentes im Bidualraum des Phasenraumes und können in Satz 2.12 die Projektionen des Lösungssegmentes auf die (identifizierten) Unterräume von $\mathcal{B}$ gemäß der Spektralzerlegung in Satz 2.4.12 im Bidualraum angeben. Eine Darstellung im Bidualraum ist für Lösungen einfacherer Gleichungen mit einer differenzierbaren Störfunktion bekannt, erfordert hier jedoch eine Verallgemeinerung des schwach*-Integrals. Durch einen nach unserem Wissen bisher nicht untersuchten Zusammenhang des Verhaltens der Lösung der so genannten adjungierten Gleichung und der Spektralzerlegung des Phasenraumes kann die Projektion des Lösungssegmentes auf den "problematischen" Unterraum abgeschätzt werden. Zusammen mit einer Anpassung von bekannten Resultaten in [MS90] für Gleichungen mit endlichem Gedächtnis können die Lyapunov-Exponenten beschrieben werden.

1 Einführung

Es sei $x = x(\cdot, \varphi, h)$ die Lösung der deterministischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(x_t) + dh(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^d)$ und $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^d)$ mit $h(0) = 0$ vorausgesetzt werden. Der Phasenraum $\mathcal{B}$ ist komplex und erfüllt die Bedingungen B und C. Die Asymptotik der Lösung x wird bestimmt durch Untersuchung des Grenzwertes

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|x_t\|_{\mathcal{B}}, \tag{1.2}$$

oder durch eine Abschätzung von

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|x_t\|_{\mathcal{B}}. \tag{1.3}$$

Der Ausdruck in (1.3) wird Lyapunov-Exponent genannt, vergleiche Seite 63 in [Mao97]. Wegen der additiven Störung h in Gleichung (1.1) kann die Bestimmung des Grenzwertes (1.2), falls dieser existiert, erfolgen, ohne die Theorie der Lyapunov-Exponenten zu nutzen. Der Fall einer multiplikativen Störung $x(t)\,h(t)$ und eines konkreten Beispiels eines Phasenraumes wird in [Els99] behandelt.

Endliches Gedächtnis 1.1 Es sei x die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \left(\int_{[-\alpha,0]} \nu(du)\, x(s+u) \right) ds + h(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x(u) &= \varphi(u) \quad \text{für } u \in [-\alpha, 0], \end{aligned} \tag{1.4}$$

mit einer stetigen Anfangsfunktion $\varphi \in C([-\alpha, 0], \mathbb{K}^d)$ und einer stetigen Funktion $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^d)$ mit $h(0) = 0$. Zu einer endlichen Teilmenge des Spektrums des Erzeugers der Lösungshalbgruppe der homogenen Gleichung, die zu (1.4) korrespondiert, kann der Raum $C = C([-\alpha, 0], \mathbb{K}^d)$ gemäß Satz 2.4.12 in $C = P \oplus Q$ zerlegt werden, siehe auch Satz 7.2.1 in [HVL93]. Die Elemente $\varphi \in P$ sind gegeben durch $\varphi = a\mathbf{\Phi}$, wobei $\mathbf{\Phi}$ eine Basis von P ist und a ein komplexwertiger Vektor. Im Fall eines endlichen Gedächtnisses kann der Koeffizient a durch eine Bilinearform $C' \times C \to \mathbb{C}$ bestimmt werden, wobei C den Raum $C([-\alpha, 0], \mathbb{C}^d)$ und C' einen Funktionenraum bezeichnet, der in engen Zusammenhang zu dem Dualraum von C steht, siehe Lemma 7.5.2 in [HVL93].
In [MS90] wird die Asymptotik der Lösung x von (1.4) – sogar allgemeiner für Anfangsbedingungen $\varphi \in L^1([-\alpha, 0], \mathbb{R}^d)$ – durch die Angabe des Grenzwertes (1.2) für $\|x_t\|_{C[-\alpha,0]}$ bestimmt. Der Nachweis basiert zum einen stark auf der Konstruktion der oben erwähnten Bilinearform zur Angabe des Koeffizienten a und zum anderen auf speziellen Gleichungen für die Fundamentallösung von (1.4).

Bei lediglich abstrakt beschriebenen Phasenräumen ist die explizite Konstruktion der in Beispiel 1.1 angesprochenen Bilinearform aufgrund der Unkenntis des Dualraumes nicht möglich. Stattdessen werden wir das Analogon dieser Bilinearform für Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis nur formal benutzen und eine Darstellung der Vergangenheit x_t der Lösung x von (1.1) im Bidualraum des Phasenraumes herleiten. Unter anderem umgehen wir dadurch die Schwierigkeit, die Differential-Resolvente spaltenweise als eine Funktion einer Erweiterung des Phasenraumes verstehen zu müssen, was für die hier betrachteten Räume im Allgemeinen nicht möglich ist und bei Gleichungen mit endlichem Gedächtnis nur aufgrund des explizit beschriebenen Raumes der Anfangsbedingungen gelingt.
Um zunächst die gewöhnliche Darstellung von x_t gemäß Satz 4.2.5 im Phasenraum in Operatorennotation wiedergeben zu können, werden für $t \geqslant 0$ die folgenden Operatoren eingeführt:

$$K(t) : C([0,t], \mathbb{C}^d) \to \mathcal{B}, \quad (K(t)h)(u) := \begin{cases} \int_0^{t+u} r(t-s+u)\, dh(s) & , u \in [-t, 0], \\ 0 & , u < -t. \end{cases}$$

Es bezeichnet r die Differential-Resolvente des Maßes $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$, durch das der Operator L gemäß Satz 2.3.1 als ein Integraloperator auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ dargestellt wird. Die Äquivalenzklasse von $K(t)h$ für $t \geqslant 0$ in $\hat{\mathcal{B}}$ gemäß Definition A.3 wird durch $\hat{K}(t)h := (K(t)h)\hat{}$ bezeichnet.
Eine Anwendung der Formel der partiellen Integration (4.2.13) zeigt, dass $K(t)h$ für $t \geqslant 0$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist, und somit ist $K(t)h$ nach Lemma 2.2.3 ein Element des Phasenraumes $\mathcal{B}$. Die Lösung $x(\cdot, \varphi, h)$ kann nach Satz 4.2.5 für $t \geqslant 0$ dargestellt werden durch:

$$x_t(\cdot, \varphi, h) = T(t)\varphi + K(t)h. \tag{1.5}$$

In dieser Darstellung kann der erste Term, die Lösung der homogenen Gleichung, in der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, nach Satz 2.4.13 abgeschätzt werden. Bei der Abschätzung des Termes $\|K(t)h\|_{\mathcal{B}}$ ist man jedoch mit der Problematik konfrontiert, dass der Integrand r, fortgesetzt durch 0 auf $\mathbb{R}_-$, oder dessen Ableitung, weder spalten- noch zeilenweise im Allgemeinen eine Funktion des Phasenraumes $\mathcal{B}$ ist. Eine andere, nur auf dem Konzept der axiomatischen Beschreibung des Phasenraumes basierende Darstellung ist notwendig.
Bevor eine alternative Repräsentation der Lösung x vorgestellt wird, zeigen wir die Beschränktheit der linearen Operatoren $K(t)$ für $t \geqslant 0$.

Lemma 1.2
Für alle $t \geqslant 0$ gilt

$$\|K(t)\|_{C[0,t]\to\mathcal{B}} \leqslant M(t) \exp\left(\|L\|_{\mathcal{B}\to\mathbb{K}^d} \int_0^t M(u)\, du \right),$$

wobei M die vom Phasenraum $\mathcal{B}$ abhängige Funktion in Bedingung A.c ist.

Beweis: Der Nachweis basiert ähnlich zu dem analogen Resultat 4.2.1 in [HMN91] bei einer differenzierbaren Funktion h auf der Bedingung A.c an einen Phasenraum. Für die Lösung $x(\cdot) = x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichung (1.1) folgt für $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \|x_t\|_{\mathcal{B}} &\leqslant M(t) \sup_{s\in[0,t]} |x(s)| + N(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leqslant M(t)\,|\varphi(0)| + N(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + M(t)\,\|h\|_{C[0,t]} + M(t)\,\|L\|_{\mathcal{B}\to\mathbb{K}^d} \int_0^t \|x_u\|_{\mathcal{B}}\, du \\ &\leqslant \alpha(t) + M(t)\,\|L\|_{\mathcal{B}\to\mathbb{K}^d} \int_0^t \|x_u\|_{\mathcal{B}}\, du \end{aligned}$$

mit $\alpha(t) := (M(t)H + N(t))\,\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + M(t)\,\|h\|_{C[0,t]}$. Das Lemma von Gronwall impliziert

$$\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leqslant \alpha(t) + M(t)\,\|L\|_{\mathcal{B}\to\mathbb{K}^d} \int_0^t \alpha(s) e^{\|L\|_{\mathcal{B}\to\mathbb{K}^d} \int_s^t M(u)\,du}\, ds.$$

Mit einer Vereinfachung des Integrals folgt für $\varphi = 0$ die Behauptung. □

2 Darstellung im Bidualraum

2.1 Die adjungierte Gleichung

Der Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ der Gleichung (1.1) werde nach Satz 2.3.1 durch ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ dargestellt. Durch die Definition

$$F_\nu(u) := \nu([u, 0]) - \nu(\{0\}) \quad \text{für } u \leqslant 0,$$

erhält man eine normalisierte Funktion $F_\nu \in BV_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$.
Es sei $\mathbb{C}^{d^*}$ der Vektorraum der d-dimensionalen komplexwertigen Zeilenvektoren. Als adjungierte Gleichung der Differentialgleichung (1.1) bezeichnet man folgende Gleichung in $\mathbb{C}^{d^*}$:

$$y(s) + \int_s^0 y(u) F_\nu(s-u)\, du = b(s) \quad \text{für} \quad s \leqslant 0, \tag{2.6}$$

für $b \in BV_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^{d^*})$. Nach dem folgenden Satz existiert eine eindeutige Lösung von lokal beschränkter Variation der Gleichung (2.6), die mit $y(\cdot, b)$ bezeichnet wird.

Satz 2.1
Für ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ und $b \in BV_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d^*})$ existiert eine eindeutige Lösung $y = y(\cdot, b) \in BV_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d^*})$ der adjungierten Gleichung (2.6). Diese Lösung besitzt für $s < 0$ die Darstellung

$$y(s) = b(0) r(-s) - \int_{[s,0]} d[b(u)]\, r(u-s),$$

wobei r die Differential-Resolvente des Maßes ν bezeichnet. Des Weiteren gilt für $s \leqslant 0$:

$$TV[y,\ [s,0]] \leqslant TV[b,[s,0]] + \|b\|_{B[s,0]} \left(\exp\left(-cs\,\|L\|_{\mathcal{B}\to\mathbb{K}^d}\,\|M\|_{C[0,-s]}\right) - 1\right)$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Falls die Funktion b normalisiert ist, so gilt dies auch für die Lösung $y(\cdot, b)$.

Beweis: Siehe Satz 4.1.4 und Korollar 4.1.7 in [HMN91]. □

Wie in Definition A.6 eingeführt, werden die Dualräume von $\mathcal{B}$ und $\hat{\mathcal{B}}$ durch $\mathcal{B}^*$ und $\hat{\mathcal{B}}^*$ bezeichnet. Der Raum $\hat{\mathcal{B}}^*$ kann nach Bemerkung A.7.b mit $\mathcal{B}^*$ identifiziert werden. Die duale Paarung von $\psi \in \mathcal{B}^*$ und $\varphi \in \mathcal{B}$ wird durch $\langle\psi, \varphi\rangle$ dargestellt. Es bezeichne $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ die Lösungshalbgruppe der homogenen Gleichung (4.2.10), die zu (1.1) korrespondiert. Die adjungierten Operatoren von $T(t)$ und $K(t)$ werden mit $T^*(t)$ und $K^*(t)$ für $t \geqslant 0$ bezeichnet.
Für jedes $\psi \in \mathcal{B}^*$ existiert nach Satz 2.3.1 ein Maß $\mu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{1\times d})$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \langle\psi, \varphi\rangle &= \int_{(-\infty,0]} d\mu(u)\,\varphi(u) \quad \text{für alle } \varphi \in C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d), \qquad (2.7)\\ \text{und}\quad |\mu|([-t,0]) &\leqslant cM(t)\,\|\psi\|_{\mathcal{B}^*} \quad \text{für alle } t > 0 \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Statt des Maßes μ wird im Folgenden die $\mathbb{C}^{d^*}$-wertige Funktion $\widetilde{\psi}(u) := \mu([u,0]) - \mu(\{0\})$ für $u \leqslant 0$ verwendet. Die Funktion $\widetilde{\psi}$ ist eine normalisierte Funktion von lokal beschränkter Variation mit

$$|\mu|([-t,0]) = \mathrm{TV}\left[\widetilde{\psi},\ [-t,0]\right] \leqslant cM(t)\,\|\psi\|_{\mathcal{B}^*}, \quad t \geqslant 0. \qquad (2.8)$$

Unter der Integration nach $d\widetilde{\psi}$ wird die Integration nach μ verstanden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir stets für $\psi \in \mathcal{B}^*$ durch $\widetilde{\psi}$ oder $(\psi)^\sim$ das auf dieser Weise definierte Element in $BV_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{1\times d})$ bezeichnen.
Die Lösung der adjungierten Gleichung und die adjungierten Operatoren der Lösungshalbgruppe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ stehen in einem engen Zusammenhang, der in dem folgenden Satz formuliert ist. Diese Beziehung zwischen der Gleichung (1.1) und der adjungierten Gleichung (2.6) ist die Grundlage für das weitere Vorgehen.

Satz 2.2
Für die Lösungshalbgruppe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ der homogenen Gleichung (4.2.10) und der Lösung y der adjungierten Gleichung (2.6) gilt für $t > 0$:

$$[T^*(t)\psi]^\sim(0-) = y(-t, \widetilde{\psi}) \quad \textit{für alle } \psi \in \mathcal{B}^*.$$

Beweis: Siehe Satz 4.2.2 in [HMN91]. □

2.2 Das schwach*-Integral

Für die Repräsentation der Lösung der Gleichung (1.1) im Bidualraum wird ein neuer Integralbegriff benötigt, der in diesem Abschnitt eingeführt wird. Dieses Integral wird ein *schwach*-Integral* sein, das sich zu dem Riemann-Stieltjes-Integral des Abschnittes 4.2 verhält wie das übliche schwach*-Integral zum Lebesgue-Integral, siehe Definition 3.7.1 in [HP74] oder Appendix II in [DGVLW95].
Es sei im Folgenden stets X ein komplexer Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_X$. Die duale Paarung von X^* und X wird mit $\langle x^*, x\rangle$ für $x^* \in X^*$ und $x \in X$ bezeichnet.

Definition 2.3
Eine Funktion $f : [a, b] \to X^*$ heißt Riemann-Stieltjes-integrierbar auf $[a, b]$ in der schwach-Topologie oder kurz* schwach*-integrierbar *bezüglich stetiger Funktionen, falls*

a) *die Abbildung $t \mapsto \langle f(t), x\rangle$ von beschränkter Variation auf $[a, b]$ für alle $x \in X$ ist;*

b) *der lineare Operator*

$$F : X \to BV([a, b], \mathbb{C}), \quad F(x)(s) := \langle f(s), x\rangle, \quad s \in [a, b],$$

stetig ist.

Die Definition einer schwach*-(R-S)-integrierbaren Funktion erlaubt, ein eindeutiges Funktional des Dualraumes X^* mit dem Riemann-Stieltjes-Integral punktweise zu identifizieren, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 2.4
Es seien $f : [a, b] \to X^*$ eine schwach-integrierbare Funktion bezüglich stetiger Funktionen auf $[a, b]$ und $h \in C([a, b], \mathbb{C})$. Dann ist*

$$x \mapsto \int_a^b \langle f(s), x\rangle \, dh(s) \quad \text{für } x \in X$$

ein stetiges lineares Funktional auf X, das heißt ein Element von X^*.

Beweis: Die Bedingung a in Definition 2.3 impliziert die Wohldefiniertheit des Integrals. Aufgrund der Stetigkeit des Operators

$$F : X \to BV([a, b], \mathbb{C}), \quad F(x)(s) := \langle f(s), x\rangle, \quad s \in [a, b].$$

nach Definition 2.3, folgt für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \langle f(s), x\rangle \, dh(s)\right| \\
&\quad = \left| -\int_a^b d_s[\langle f(s), x\rangle] \, h(s) + \langle f(b), x\rangle h(b) - \langle f(a), x\rangle h(a)\right| \\
&\quad \leqslant \|h\|_{C[a,b]} \left(\mathrm{TV}\left[F(x), [a, b]\right] + |F(x)(b)| + |F(x)(a)|\right) \\
&\quad \leqslant 2 \|h\|_{C[a,b]} \|F(x)\|_{BV[a,b]} \\
&\quad \leqslant 2 \|h\|_{C[a,b]} \|F\|_{X\to BV} \|x\|_X .
\end{aligned}$$

□

Das schwach*-Integral wird definiert als das Element des Dualraumes X^*, welches nach dem vorausgegangenen Lemma eindeutig existiert.

Definition 2.5
Es sei $f : [a,b] \to X^*$ eine schwach-integrierbare Funktion bezüglich stetiger Funktionen. Als* schwach*-Integral *von f bezüglich einer stetigen Funktion $h \in C([a,b],\mathbb{C})$ wird folgendes Element des Dualraumes X^* bezeichnet:*

$$*\!\int_a^b f(t)\,dh(t) \in X^* : \quad \langle *\!\int_a^b f(t)\,dh(t), x\rangle := \int_a^b \langle f(t), x\rangle\,dh(t) \quad \text{für } x \in X.$$

Eine vektorwertige Funktion $f = (f_1,\dots,f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_i : [a,b] \to X^*$ wird schwach*-integrierbar bezüglich stetiger Funktionen genannt, falls f_i schwach*-integrierbar für $i = 1,\dots,n$ ist. Das schwach*-Integral von f bezüglich $h = (h_1,\dots,h_n)^T \in C([a,b],\mathbb{C}^n)$ wird definiert durch:

$$*\!\int_a^b f(s)\,dh(s) := \sum_{i=1}^n *\!\int_a^b f_i(s)\,dh_i(s).$$

Bemerkung 2.6 In dem analogen Resultat (Satz 3.7.1 in [HP74]) zu Lemma 2.4 für das gewöhnliche schwach*-Integral wird die Bedingung a in Definition 2.3 ersetzt durch die Forderung nach Messbarkeit und Integrierbarkeit der Funktion $\langle f(\cdot), x\rangle$. Diese Eigenschaft reicht bereits aus, um den Operator F in der zweiten Bedingung der Definition 2.3 als einen abgeschlossenen Operator nachzuweisen, falls $BV([a,b],\mathbb{C})$ ersetzt wird durch $L^1([a,b],\mathbb{C})$. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt die Stetigkeit von F, die in unserer Definition gefordert werden muss.

Die einfache Eigenschaft der Linearität des schwach*-Integrals bezüglich einer stetigen Funktion ergibt sich unmittelbar. Die Kommutativität des Integrals mit adjungierten Operatoren wird im folgenden Lemma festgehalten.

Lemma 2.7
Es seien $f : [a,b] \to X^*$ eine schwach-integrierbare Funktion bezüglich stetiger Funktionen und T ein Operator in $\mathcal{L}(X,X)$. Dann ist $T^*f : [a,b] \to X^*$ eine schwach*-integrierbare Funktion bezüglich stetiger Funktionen und es gilt für $h \in C([a,b],\mathbb{C})$:*

$$T^* *\!\int_a^b f(s)\,dh(s) = *\!\int_a^b T^*f(s)\,dh(s).$$

Beweis: Zunächst impliziert die Gleichheit $\langle T^*f(s), x\rangle = \langle f(s), Tx\rangle$ für jedes $x \in X$ und $s \in [a,b]$ die schwach*-Integrierbarkeit von T^*f bezüglich stetiger Funktionen. Die behauptete Kommutativität folgt aus der folgenden Gleichheit, die für alle $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle T^* *\!\!\int_a^b f(s)\,dh(s), x\rangle &= \langle *\!\!\int_a^b f(s)dh(s), Tx\rangle \\ &= \int_a^b \langle f(s), Tx\rangle\, dh(s) \\ &= \int_a^b \langle T^* f(s), x\rangle\, dh(s) \\ &= \langle *\!\!\int_a^b T^* f(s)\, dh(s), x\rangle. \end{aligned}$$

□

2.3 Die schwach*-Repräsentation

Mit dem schwach*-Integral des vorigen Abschnittes lässt sich eine Darstellung der Lösung von Gleichung (1.1) im Bidualraum $\mathcal{B}^{**}$ des Phasenraumes $\mathcal{B}$ angeben. Die Rolle des Banachraumes X übernimmt dabei der Dualraum $\mathcal{B}^*$. Es wird eine "integrierte" Version der Gleichheit in Satz 2.2 benötigt:

Lemma 2.8
Für $\psi \in \mathcal{B}^*$ und $h \in C([0,t], \mathbb{C}^d)$ gilt:

$$\langle \psi, \hat{K}(t)h\rangle = -\int_0^t [T^*(t-s)\psi]\tilde{}\,(0-)\; dh(s) \quad \textit{für } t > 0.$$

Beweis: Das Integral ist wohldefiniert, da Satz 2.1 die Lösung $y(\cdot, \widetilde{\psi})$ der adjungierten Gleichung (2.6) auf dem Intervall $[0,t]$ als eine Funktion von beschränkter Variation ausweist und Satz 2.2 für $0 \leqslant s < t$ die Gleichheit $[T^*(t-s)\psi]\tilde{}\,(0-) = y(s-t, \widetilde{\psi})$ gewährleistet.
Sei zunächst h eine stetig differenzierbare Funktion auf $[0,t]$. Mit der Darstellung der Lösung $y(\cdot, \widetilde{\psi})$ der adjungierten Gleichung (2.6) gemäß Satz 2.1 folgt aus Satz 2.2 und (2.7) für $\psi \in \mathcal{B}^*$ und $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\langle \psi, K(t)h\rangle &= \int_{[-t,0]} d\widetilde{\psi}(u)\,(K(t)h)(u) \\ &= \int_{[-t,0]} d\widetilde{\psi}(u) \left(\int_0^{t+u} r(t-s+u)\,dh(s)\right) \\ &= \int_{[-t,0]} d\widetilde{\psi}(u) \left(\int_0^{t+u} r(t-s+u)\dot{h}(s)\,ds\right) \\ &= \int_0^t \left(\int_{[s-t,0]} d\widetilde{\psi}(u)\, r(t-s+u)\right) \dot{h}(s)\,ds \\ &= -\int_0^t y(s-t, \widetilde{\psi})\dot{h}(s)\,ds \end{aligned}$$

$$= -\int_0^t [T^*(t-s)\psi]\tilde{}(0-)\ dh(s).$$

Für eine beliebige Funktion $h \in C([0,t],\mathbb{C}^d)$ existiert eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,t],\mathbb{C}^d)$ mit $\|h-h_n\|_{C[0,t]} \to 0$ für $n \to \infty$. Es folgt für $t \geqslant 0$ und $\psi \in \mathcal{B}^*$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \langle \psi, K(t)h_n\rangle \\
&\quad = -\lim_{n\to\infty} \int_0^t [T^*(t-s)\psi]\tilde{}(0-)\ dh_n(s) \\
&\quad = -\lim_{n\to\infty} \left\{ -\int_0^t d_s[T^*(t-s)\psi]\tilde{}(0-)\ h_n(s) + \widetilde{\psi}(0-)h_n(t) - [T^*(t)\psi]\tilde{}(0-)h_n(0) \right\} \\
&\quad = \int_0^t \big(d_s[T^*(t-s)\psi]\tilde{}(0-)\ h(s)\big) - \widetilde{\psi}(0-)h(t) + [T^*(t)\psi]\tilde{}(0-)h(0) \\
&\quad = -\int_0^t [T^*(t-s)\psi]\tilde{}(0-)\ dh(s).
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $K(t)$ für $t \geqslant 0$ nach Lemma 1.2 folgt die Behauptung. □

Im Folgenden wird $\hat{\mathcal{B}}$ stets auf kanonische Art mit einem Unterraum des Bidualraumes $\mathcal{B}^{**}$ identifiziert.

Definition 2.9
Es sei $\mathcal{B} = B(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^d)$ ein Phasenraum. Definiere

$$\begin{aligned}
&\gamma : \mathcal{B}^* \to \mathbb{C}^{d^*}, \quad \gamma(\psi) := (\gamma^1(\psi),\dots,\gamma^d(\psi)), \\
&\qquad\qquad \textit{mit } \gamma^i : \mathcal{B}^* \to \mathbb{C}, \quad \gamma^i(\psi) := -\widetilde{\psi}^i(0-) \quad \textit{für } i = 1,\dots,d,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

wobei $\widetilde{\psi}^i$ die i-te Komponente von $\widetilde{\psi}$ bezeichnet.

Nach Definition gilt $\gamma(\psi) = -\widetilde{\psi}(0-)$ für $\psi \in \mathcal{B}^*$. Aus Ungleichung (2.8) folgt für $\psi \in \mathcal{B}^*$:

$$\left|\gamma^i(\psi)\right| \leqslant \left|\widetilde{\psi}(0-)\right| \leqslant \mathrm{TV}\left[\widetilde{\psi},[-1,0]\right] \leqslant cM(1)\,\|\psi\|_{\mathcal{B}^*}$$

mit einer Konstanten $c > 0$ und man erhält $\gamma^i \in \mathcal{B}^{**}$ für $i = 1,\dots,d$, siehe auch Seite 118 in [HMN91]. Für einen beliebigen Operator T auf $\mathcal{B}^{**}$ definiere $T\gamma := (T\gamma^1,\dots,T\gamma^d)$.
Es kann jetzt eine Formel der Variation der Konstanten im Bidualraum $\mathcal{B}^{**}$ für die Lösung x der Gleichung (1.1) formuliert werden. Diese Darstellung wird Ausgangspunkt für Abschätzungen von $\|x_t\|_{\mathcal{B}}$ für $t \to \infty$ der Lösung x der Gleichung (1.1) sein.

Satz 2.10
Es sei $x(\cdot) = x(\cdot, \varphi, h)$ die Lösung der Gleichung (1.1). Dann ist $T^{**}(t-\cdot)\gamma^i : [0,t] \to \mathcal{B}^{**}$ schwach*-integrierbar bezüglich stetiger Funktionen für $i = 1, \ldots, d$, und es gilt

$$\hat{x}_t = \hat{T}(t)\hat{\varphi} + *\!\!\int_0^t T^{**}(t-s)\gamma \, dh(s) \quad \textit{für } t \geqslant 0 \textit{ in } \mathcal{B}^{**}.$$

Beweis: Für $t \geqslant 0$ und $i = 1, \ldots, d$ definiere

$$f^i : [0,t] \to \mathcal{B}^{**}, \quad f^i(s) := T^{**}(t-s)\gamma^i.$$

Zunächst wird die schwach*-Integrierbarkeit von f^i nachgewiesen. Aus der Definition von γ^i und Satz 2.2 folgt für $\psi \in \mathcal{B}^*$ und $s \in [0,t]$:

$$\begin{aligned} \langle \psi, f^i(s) \rangle &= \langle \psi, T^{**}(t-s)\gamma^i \rangle \\ &= \langle T^*(t-s)\psi, \gamma^i \rangle \\ &= -([T^*(t-s)\psi]^{\sim})^i(0-) \\ &= -y^i(s-t, \widetilde{\psi}), \end{aligned} \tag{2.10}$$

wobei $y^i(\cdot, \widetilde{\psi})$ die i-te Komponente der Lösung $y(\cdot, \widetilde{\psi})$ der adjungierten Gleichung (2.6) und $([T^*(\cdot)\psi]^{\sim})^i$ die i-te Komponente von $[T^*(\cdot)\psi]^{\sim}$ bezeichnen. Aus Satz 2.1 folgt die beschränkte Variation der Funktion $\langle \psi, f^i(\cdot) \rangle$ auf $[0,t]$ für $\psi \in \mathcal{B}^*$.
Durch Anwendung der Gleichheit (2.10) implizieren Satz 2.1 und die Abschätzung (2.8) für $\psi \in \mathcal{B}^*$:

$$\begin{aligned} \left\| \langle \psi, f^i(\cdot) \rangle \right\|_{BV[0,t]} &\leqslant \left| y(-t, \widetilde{\psi}) \right| + \mathrm{TV}\left[y(\cdot - t, \widetilde{\psi}), [0,t] \right] \\ &\leqslant 2 \left(\mathrm{TV}\left[\widetilde{\psi}, [-t, 0] \right] + c_1(t) \|\widetilde{\psi}\|_{B[-t,0]} \right) \\ &\leqslant c_2(t) \mathrm{TV}\left[\widetilde{\psi}, [-t, 0] \right] \\ &\leqslant c_3(t) M(t) \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} \end{aligned}$$

mit $c_k(t) > 0$ für $k = 1, 2, 3$. Es folgt die schwach*-Integrierbarkeit von f^i für $i = 1, \ldots, d$.
Lemma 2.8 impliziert für $\psi \in \mathcal{B}^*$ und $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \langle \psi, *\!\!\int_0^t T^{**}(t-s)\gamma \, dh(s) \rangle &= \int_0^t \langle \psi, T^{**}(t-s)\gamma \rangle \, dh(s) \\ &= \int_0^t \langle T^* \psi, \gamma \rangle \, dh(s) \\ &= -\int_0^t [T^*(t-s)\psi]^{\sim}(0-) \, dh(s) \\ &= \langle \psi, \hat{K}(t)h \rangle. \end{aligned}$$

Wegen der Darstellung $\hat{x}_t = \hat{T}(t)\varphi + \hat{K}(t)h$ nach (1.5) folgt die Behauptung. $\square$

Es bezeichne wie gewohnt $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ und $\hat{\mathrm{A}}$ die Lösungshalbgruppe und deren infinitesimalen Erzeuger der homogenen Gleichung (2.1.1), die zu Gleichung (1.1) korrespondiert. Bezüglich $\Lambda \subseteq \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_\beta$ wird der Phasenraum $\hat{\mathcal{B}}$ in $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ gemäß Satz 2.4.12 zerlegt, wobei $\beta = \beta_{\mathcal{B}}$ in Definition 2.4.2 eingeführt ist. Um eine Abschätzung von $\|x_t\|_{\mathcal{B}}$ zu erhalten, wird das Segment x_t in der Darstellung des Satzes 2.10 auf die zu $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ und $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ entsprechenden Räume im Bidualraum projiziert. Diese Projektionen von x_t lassen sich schließlich in der Norm $\|\cdot\|_{\hat{\mathcal{B}}}$ abschätzen. Für dieses Vorgehen in den nächsten Abschnitten werden einige Notationen eingeführt.
Eine Basis von $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ wird angegeben durch $\{\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_k\}$ mit $\hat{\Phi}_i \in \hat{\mathcal{B}}$ für $i = 1, \dots, k$. Der Annihilator von $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ ist definiert als

$$(\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda)^\perp := \{\psi \in \mathcal{B}^* : \langle \psi, \hat{\varphi} \rangle = 0 \text{ für jedes } \hat{\varphi} \in \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda\}.$$

Hierbei ist nach Bemerkung A.7 der Dualraum $\hat{\mathcal{B}}^*$ mit $\mathcal{B}^*$ identifiziert worden. Nach Lemma 5.3.6 in [HMN91] existiert eine Basis $\{\Psi_1, \dots, \Psi_k\}$ von $(\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda)^\perp$ mit $\Psi_i \in \mathcal{B}^*$ für $i = 1, \dots, k$, so dass $\langle \Psi_i, \hat{\Phi}_j \rangle = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, k$ gilt. Die Projektionen bezüglich der direkten Summe $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ seien gegeben durch

$$\pi_P : \hat{\mathcal{B}} \to \hat{\mathcal{B}}, \quad \pi_P(\hat{\varphi}) := \hat{\varphi}^P \quad \text{für } \hat{\varphi} = \hat{\varphi}^P + \hat{\varphi}^Q, \quad \hat{\varphi}^P \in \hat{\mathrm{P}}_\Lambda,\ \hat{\varphi}^Q \in \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda, \tag{2.11}$$
$$\pi_Q : \hat{\mathcal{B}} \to \hat{\mathcal{B}}, \quad \pi_Q(\hat{\varphi}) := \hat{\varphi}^Q \quad \text{für } \hat{\varphi} = \hat{\varphi}^P + \hat{\varphi}^Q, \quad \hat{\varphi}^P \in \hat{\mathrm{P}}_\Lambda,\ \hat{\varphi}^Q \in \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda\,. \tag{2.12}$$

Die Projektionen π_P und π_Q sind nach Satz 5.16 in [Rud73] beschränkte lineare Operatoren. Aufgrund der Invarianz der Operatoren $\hat{\mathrm{T}}(t)$ auf den Räumen $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ und $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ nach Satz 2.4.12 folgt für $t \geqslant 0$

$$\pi_P^* T^*(t) = T^*(t)\pi_P^* \quad \text{und} \quad \pi_P^{**} T^{**}(t) = T^{**}(t)\pi_P^{**}, \tag{2.13}$$

sowie analog für die Projektion π_Q auf $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$.
Die Basen von $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ und $(\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda)^\perp$ werden abkürzend als Zeilen- und Spaltenvektoren aufgefasst:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda &:= (\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_k) \quad \text{für } \Phi_i \in \hat{\mathcal{B}} \text{ für } i = 1, \dots, k,\\ \boldsymbol{\Psi}_\Lambda &:= (\Psi_1, \dots, \Psi_k)^T \quad \text{für } \Psi_i \in \mathcal{B}^* \text{ für } i = 1, \dots, k,\end{aligned}$$

Operatoren wirken komponentenweise auf diese Vektoren. Für $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{B}}$ und $\varphi^{**} \in \mathcal{B}^{**}$ seien

$$\langle \boldsymbol{\Psi}_\Lambda, \hat{\varphi} \rangle := \begin{pmatrix} \langle \Psi_1, \hat{\varphi} \rangle \\ \vdots \\ \langle \Psi_k, \hat{\varphi} \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times 1} \quad \text{und} \quad \langle \boldsymbol{\Psi}_\Lambda, \varphi^{**} \rangle := \begin{pmatrix} \langle \Psi_1, \varphi^{**} \rangle \\ \vdots \\ \langle \Psi_k, \varphi^{**} \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times 1}\,.$$

Mit der Abbildung $\widetilde{\ } : \mathcal{B}^* \to BV_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^{1\times d})$ und der in (2.9) eingeführten Abbildung γ definiere

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_\Lambda := \begin{pmatrix} \widetilde{\Psi}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\Psi}_k \end{pmatrix} \in BV_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^{k\times d}) \quad \text{und} \quad \langle \boldsymbol{\Psi}_\Lambda, \gamma \rangle := \begin{pmatrix} \gamma(\Psi_1) \\ \vdots \\ \gamma(\Psi_k) \end{pmatrix} = -\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_\Lambda(0-) \in \mathbb{C}^{k\times d}.$$

Nach Lemma 5.3.6 in [HMN91] ist die Projektion π_P auf $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ gegeben durch

$$\pi_P\,\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{k} \langle \Psi_i, \hat{\varphi} \rangle \Phi_i = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda \, \langle \boldsymbol{\Psi}_\Lambda, \hat{\varphi} \rangle \quad \text{für } \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{B}}, \tag{2.14}$$

$$\pi_P^{**}\varphi^{**} = \sum_{i=1}^{k} \langle \Psi_i, \varphi^{**} \rangle \Phi_i = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda \, \langle \boldsymbol{\Psi}_\Lambda, \varphi^{**} \rangle \quad \text{für } \varphi^{**} \in \mathcal{B}^{**}. \tag{2.15}$$

Des Weiteren existiert nach Satz 2.4.12 eine Matrix $G_\Lambda \in \mathbb{C}^{k\times k}$, die der Gleichung $\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda\, G_\Lambda$ genügt.

Endliches Gedächtnis 2.11 Die Gleichung (2.14) gibt in abstrakter Weise für $\hat{\varphi}^P \in \hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ die Koeffizienten $\langle \boldsymbol{\Psi}_\Lambda, \hat{\varphi}^P \rangle$ bezüglich der Basis $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_\Lambda$ an. Für eine Gleichung mit endlichem Gedächtnis kann in Lemma 7.5.2 in [HVL93] eine explizite Darstellung des dualen Paares $\langle \Psi_\Lambda, \hat{\varphi} \rangle$ angegeben werden; siehe auch Beispiel 1.1.

Satz 2.12
Es sei $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ eine Zerlegung bezüglich $\Lambda \subseteq \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_\beta$. Dann besitzen die Projektionen der Lösung $x(\cdot) = x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichung (1.1) auf $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ und $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ für $t \geqslant 0$ die Darstellungen:

$$\pi_P \hat{x}_t = \hat{T}(t)(\pi_P \hat{\varphi}) + *\!\!\int_0^t T^{**}(t-s)(\pi_P^{**}\gamma)\, dh(s) \quad \text{in } \mathcal{B}^{**},$$
$$\pi_Q \hat{x}_t = \hat{T}(t)(\pi_Q \hat{\varphi}) + *\!\!\int_0^t T^{**}(t-s)(\pi_Q^{**}\gamma)\, dh(s) \quad \text{in } \mathcal{B}^{**},$$

wobei γ den in (2.9) eingeführten Vektor mit Komponenten in $\mathcal{B}^{**}$ bezeichnet und die Projektionen π_P^{**} und π_Q^{**} komponentenweise auf γ wirken.

Beweis: Auf $\hat{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}^{**}$ gilt $\pi_P = \pi_P^{**}$. Wegen der Kommutativität des schwach*-Integrals nach Lemma 2.7 und der Kommutativität in (2.13) ergibt die Anwendung der Projektion π_P auf die Darstellung in Satz 2.10 für $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \pi_P \hat{x}_t &= \pi_P \left(\hat{T}(t)\hat{\varphi} \right) + \pi_P^{**} \left(*\!\!\int_0^t T^{**}(t-s)\gamma\, dh(s) \right) \\ &= \hat{T}(t)(\pi_P \hat{\varphi}) + *\!\!\int_0^t T^{**}(t-s)(\pi_P^{**}\gamma)\, dh(s). \end{aligned}$$

Analog wird die Darstellung der Projektion auf $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ nachgewiesen. □

Für Gleichungen mit endlichem Gedächtnis gibt Satz 2 in [MSW86] analoge Projektionen zu jenen in Satz 2.12 an. Die Projektionen können jedoch in der dort betrachteten Situation direkt auf dem zugrunde liegenden Funktionenraum der Anfangsbedingungen angegeben werden, da die Fundamentallösung als ein Element dieses Raumes verstanden werden kann. Bei den hier axiomatisch beschriebenen Phasenräumen ist dieses nicht mehr möglich.
Das folgende Korollar gibt eine einfache Darstellung der auf den endlich-dimensionalen Raum $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda \subseteq \hat{\mathcal{B}}$ projizierten Lösung $\pi_P \hat{x}_t$ an.

Korollar 2.13
Es sei $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ eine Zerlegung bezüglich $\Lambda \subseteq \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_\beta$. Dann ist die Projektion auf $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ der Lösung $x(\cdot) = x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichung (1.1) für $t \geqslant 0$ gegeben durch:

$$\pi_P \hat{x}_t = \hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda \, e^{G_\Lambda t} \langle \mathbf{\Psi}_\Lambda, \hat{\varphi} \rangle - \int_0^t \hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda \, e^{G_\Lambda (t-s)} \widetilde{\mathbf{\Psi}}_\Lambda (0-) \, dh(s).$$

Beweis: Die Darstellung (2.14) der Projektion π_P nutzend, impliziert Satz 2.4.12.c für $t \geqslant 0$

$$\hat{T}(t)(\pi_P \, \hat{\varphi}) = \hat{\mathrm{T}}(t)(\hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda \, \langle \mathbf{\Psi}_\Lambda, \hat{\varphi} \rangle) = \hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda \, e^{G_\Lambda t} \langle \mathbf{\Psi}_\Lambda, \hat{\varphi} \rangle.$$

Unter Ausnutzung der Gleichheit $\hat{\mathrm{T}}(t) = T(t)^{**}$ auf $\hat{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}^{**}$ erhält man analog für den Integranden des schwach*-Integrals in der Darstellung des Satzes 2.12 für $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} T^{**}(t)(\pi_P^{**} \gamma) &= T^{**}(t)(\hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda \, \langle \mathbf{\Psi}_\Lambda, \gamma \rangle) \\ &= \hat{\mathrm{T}}(t)(\hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda \, \langle \mathbf{\Psi}_\Lambda, \gamma \rangle) \\ &= - \, \hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda \, e^{t G_\Lambda} \widetilde{\mathbf{\Psi}}_\Lambda (0-). \end{aligned}$$

Die Darstellung von $\pi_P \hat{x}_t$ für $t \geqslant 0$ in Satz 2.12 beendet den Beweis. □

Bemerkung 2.14 Aus Korollar 2.13 folgt für die Lösung $x = x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichung (1.1) und $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} (\pi_P \hat{x}_t)(u) &= \hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda (u) \left(e^{G_\Lambda t} \langle \mathbf{\Psi}_\Lambda, \hat{\varphi} \rangle - \int_0^t e^{G_\Lambda (t-s)} \widetilde{\mathbf{\Psi}}_\Lambda (0-) \, dh(s) \right), \quad u \leqslant 0, \\ &=: \hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda (u) U_\Lambda (t), \quad u \leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ist der Raum $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ k-dimensional, so nimmt die Funktion $U_\Lambda(t) = \langle \mathbf{\Psi}_\Lambda, x_t \rangle$ Werte in $\mathbb{C}^k$ an. Die Funktion $U_\Lambda(\cdot)$ wird als Koordinatenfunktion bezeichnet.

3 Abschätzungen auf P_Λ und Q_Λ

Mit den nach Satz 2.10 eingeführten Notationen wird eine Zerlegung $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ des Phasenraumes $\mathcal{B}$ bezüglich einer Menge $\Lambda \subseteq \{\lambda \in \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) : \mathrm{Re}\ \lambda \geqslant c\}$ mit $c > \beta_{\mathcal{B}}$ betrachtet. Für die Funktion $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^d)$ wird das asymptotische Wachstum $h(t) = \mathcal{O}(e^{\kappa t})$ für $t \to \infty$ und $\kappa < c$ angenommen. Unter diesen Voraussetzungen ist gemäß Definition 4.2.3.b das folgende Integral für $t \geqslant 0$ wohl definiert:

$$Y_\Lambda(t) := \int_t^\infty e^{G_\Lambda(t-s)} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_\Lambda(0-)\, dh(s) \in \mathbb{C}^{k\times 1}, \tag{3.17}$$

da $\sigma(G_\Lambda) = \Lambda$ nach Satz 2.4.12 gilt.

Satz 3.1
Für $c > \beta_{\mathcal{B}}$ sei $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(\hat{\mathrm{A}}) : \mathrm{Re}\ \lambda \geqslant c\}$ gegeben durch $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_p$ mit $\Lambda_i = \{\lambda \in \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) : \mathrm{Re}\ \lambda = v_i\}$ und $v_1 > \cdots > v_p$. Bezüglich Λ_i bezeichne $\boldsymbol{\Psi}_i$ die Basen von $(\hat{Q}_{\Lambda_i})^\perp$ bei Zerlegungen $\hat{\mathcal{B}} = \hat{P}_{\Lambda_i} \oplus \hat{Q}_{\Lambda_i}$ für $i = 1, \ldots, p$ gemäß Satz 2.4.12 sowie Y_{Λ_i} die in (3.17) definierten Funktionen. Dann gilt für die Lösung $x = x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichung (1.1) zu einem $\varphi \in \mathcal{B}$ und einer Störfunktion $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^d)$ mit $h(t) = \mathcal{O}(e^{\kappa t})$, $t \to \infty$, für ein $\kappa < v_p$:

a) *falls $\langle \boldsymbol{\Psi}_i, \hat{\varphi}\rangle = Y_{\Lambda_i}(0)$ für $i = 1, \ldots, l-1$ mit $l \in \{1, \ldots, p\}$ und $\langle \boldsymbol{\Psi}_l, \hat{\varphi}\rangle \neq Y_{\Lambda_l}(0)$, dann folgt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log \|\pi_P \hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}}}{t} = v_l;$$

b) *falls $\langle \boldsymbol{\Psi}_i, \hat{\varphi}\rangle = Y_{\Lambda_i}(0)$ für $i = 1, \ldots, p$:*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \|\pi_P \hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}}}{t} \leqslant \kappa.$$

Dabei bezeichne π_P die Projektion (2.11) auf $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ bei Zerlegung des Phasenraumes $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ bezüglich $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_p$.

Beweis: Ersetzt man in Lemma 7 und Satz 8 in [MS90] die explizite Bilinearform durch die duale Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, so lassen sich die Beweise übertragen. □

Satz 3.1 gibt das Verhalten von $\|\pi_P x_t\|_{\hat{\mathcal{B}}}$ der Lösung $x = x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichung (1.1) für $t \to \infty$ an, wobei π_P die Projektion gemäß (2.11) auf $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ bei einer Zerlegung $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ des Phasenraumes $\mathcal{B}$ angibt. Zur Bestimmung des Grenzwertes (1.2) verbleibt, eine Abschätzung für $\|\pi_Q x_t\|_{\hat{\mathcal{B}}}$ zu erhalten, wobei π_Q die korrespondierende Projektion (2.12) bezeichnet. Dies gelingt mittels der Lösung $y(\cdot, b)$ der adjungierten Gleichung (2.6) zu den Anfangsbedingungen $b \in BV_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^{d^*})$. Zunächst wird eine

Abschätzung der Variation der Funktion $y(\cdot, b)$ für die Anfangsbedingungen b einer bestimmten Teilmenge von $BV_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^{d^*})$ benötigt.

Lemma 3.2
Es seien $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ eine Zerlegung des Phasenraumes $\mathcal{B}$ bezüglich $\Lambda = \{\lambda \in \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) : Re\,\lambda \geqslant c\}$ für ein $c > \beta_{\mathcal{B}}$ sowie π_Q die Projektion (2.12) auf $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Konstanten $k_0 = k_0(\varepsilon)$ und $k_1 = k_1(\varepsilon)$, so dass die Lösung $y(\cdot, [\pi_Q^*\psi]^{\tilde{}})$ der adjungierten Gleichung (2.6) für jedes $\psi \in \mathcal{B}^*$ und $t \geqslant 0$ der folgenden Abschätzung genügt:

$$TV\left[y(\cdot, [\pi_Q^*\psi]^{\tilde{}}), [-t, 0]\right] \leqslant \left(k_0 M(t) + k_1 \int_0^t M(t-u) e^{(c'+\varepsilon)u}\, du\right) \|\psi\|_{\mathcal{B}^*},$$

wobei $c' := \sup\{\lambda \in \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}} : Re\,\lambda < c\} \vee \beta_{\mathcal{B}}$ und M die Funktion der Bedingung A.c an den Phasenraum $\mathcal{B}$ bezeichnet.

Beweis: Auftretende Konstanten, die nur von ε abhängen, werden in diesem Beweis mit c_i, $i \in \mathbb{N}$, bezeichnet. Der Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^d)$ in der Gleichung (1.1) werde durch das Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^{d\times d})$ auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^d)$ gemäß Satz 2.3.1 dargestellt. Mit $y = y(\cdot, [\pi_Q^*\psi]^{\tilde{}})$ und $F_\nu := \nu([u, 0]) - \nu(\{0\})$ für $u \leqslant 0$ definiere für $s \leqslant 0$:

$$I(s) := \int_s^0 y(u) F_\nu(s-u)\, du.$$

Da $y(\cdot, [\pi_Q^*\psi]^{\tilde{}})$ Lösung der adjungierten Gleichung (2.6) ist, gilt für $t \geqslant 0$:

$$\mathrm{TV}\left[y(\cdot, [\pi_Q^*\psi]^{\tilde{}}), [-t, 0]\right] \leqslant \mathrm{TV}\left[I, [-t, 0]\right] + \mathrm{TV}\left[[\pi_Q^*\psi]^{\tilde{}}, [-t, 0]\right]. \tag{3.18}$$

Wegen der Abschätzung (2.8) folgt für $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{TV}\left[[\pi_Q^*\psi]^{\tilde{}}, [-t, 0]\right] &\leqslant c_1 M(t) \left\|\pi_Q^*\psi\right\|_{\mathcal{B}^*} \\ &\leqslant c_1 \left\|\pi_Q^*\right\|_{\mathcal{B}^*\to\mathcal{B}^*} \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} M(t). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Es verbleibt, die totale Variation der Funktion I in (3.18) abzuschätzen. Satz 2.4.13 impliziert für jedes $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{B}}$ und $t \geqslant 0$

$$\left\|(\pi_Q\, \hat{\mathrm{T}}(t))\, \hat{\varphi}\right\|_{\hat{\mathcal{B}}} = \left\|\hat{\mathrm{T}}(t)(\pi_Q\, \hat{\varphi})\right\|_{\hat{\mathcal{B}}} \leqslant c_2 \|\pi_Q\, \hat{\varphi}\|_{\hat{\mathcal{B}}}\, e^{(c'+\varepsilon)t} \leqslant c_2 \|\pi_Q\|_{\hat{\mathcal{B}}\to\hat{\mathcal{B}}} \|\hat{\varphi}\|_{\hat{\mathcal{B}}}\, e^{(c'+\varepsilon)t}.$$

Mit Satz 2.2 und der Abschätzung (2.8) folgt deshalb für $t \geqslant 0$ und $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \left|y(-t, [\pi_Q^*\psi]^{\tilde{}})\right| &= \left|(T^*(t)(\pi_Q^*\psi))^{\tilde{}}(0-)\right| \\ &\leqslant 2\mathrm{TV}\left[(T^*(t)(\pi_Q^*\psi))^{\tilde{}}(\cdot), [-\delta, 0]\right] \\ &\leqslant c_3 M(\delta) \left\|T^*(t)(\pi_Q^*\psi)\right\|_{\mathcal{B}^*} \\ &\leqslant c_3 M(\delta) \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} \left\|T^*(t)\pi_Q^*\right\|_{\mathcal{B}^*\to\mathcal{B}^*} \\ &= c_3 M(\delta) \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} \left\|\pi_Q\, \hat{\mathrm{T}}(t)\right\|_{\hat{\mathcal{B}}\to\hat{\mathcal{B}}} \\ &\leqslant c_4 M(\delta) \|\psi\|_{\mathcal{B}^*}\, e^{(c'+\varepsilon)t}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Die verwendete Norm-Isometrie eines linearen stetigen Operators und dessen adjungierten Operators ist in Satz 4.10 in [Rud73] festgehalten. Da $\delta > 0$ in der Abschätzung (3.20) beliebig ist, impliziert die Stetigkeit von M für $t \geqslant 0$:

$$\left|y(-t, [\pi_Q^* \psi]^{\tilde{}})\right| \leqslant c_4 M(0) \, \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} \, e^{(c'+\varepsilon)t}. \tag{3.21}$$

Aus den Abschätzungen der Variation von F_ν nach (2.8) und aus (3.21) folgt für $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{TV}\,[I, [-t, 0]] &\leqslant \int_{-t}^{0} |y(u)| \, \mathrm{TV}\,[F_\nu, [-t-u, 0]] \; du \\ &\leqslant c_5 \, \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} \int_0^t M(t-u) e^{(c'+\varepsilon)u} \, du. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Die erste Ungleichung wird erzielt durch einen Übergang zu den Partitionen des Intervalls $[-t, 0]$ und eine Anwendung des Satzes der monotonen Konvergenz. Mit den Abschätzungen (3.19) und (3.22) folgt aus der Ungleichung (3.18) die Behauptung. $\square$

Satz 3.3
Es sei $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ eine Zerlegung bezüglich $\Lambda = \{\lambda \in \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) : Re\,\lambda \geqslant c\}$ für ein $c > \beta_{\mathcal{B}}$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ und $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{B}}$ eine Konstante $k = k(\varepsilon, \hat{\varphi})$, so dass die Projektion (2.12) auf $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ der Lösung $x = x(\cdot, \varphi, h)$ von Gleichung (1.1) der folgenden Abschätzung für $t \geqslant 0$ genügt

$$\|\pi_Q \hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}} \leqslant k \left(e^{(c'+\varepsilon)t} + \|h\|_{C[0,t]} \left(M(t) + \int_0^t M(t-u) e^{(c'+\varepsilon)u} du \right) \right),$$

wobei $c' := \sup\{\lambda \in \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}} : Re\,\lambda < c\} \vee \beta_{\mathcal{B}}$ und M die Funktion der Bedingung A.c an den Phasenraum $\mathcal{B}$ bezeichnet.

Beweis: Aus der Darstellung in Satz 2.12 folgt für $t \geqslant 0$:

$$\|\pi_Q \hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}} \leqslant \left\| \hat{\mathrm{T}}(t)(\pi_Q \hat{\varphi}) \right\|_{\hat{\mathcal{B}}} + \left\| {}^*\!\!\int_0^t T^{**}(t-s)(\pi_Q^{**}\gamma) \, dh(s) \right\|_{\mathcal{B}^{**}}. \tag{3.23}$$

Für den ersten Summanden in (3.23) gilt aufgrund des Satzes 2.4.13 für $t \geqslant 0$:

$$\left\| \hat{\mathrm{T}}(t)(\pi_Q \hat{\varphi}) \right\|_{\hat{\mathcal{B}}} \leqslant c_1 \, \|\pi_Q\|_{\hat{\mathcal{B}} \to \hat{\mathcal{B}}} \, \|\hat{\varphi}\|_{\hat{\mathcal{B}}} \, e^{(c'+\varepsilon)t}$$

mit einer Konstanten $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$. Nutzt man zunächst die "adjungierte" Darstellung der Norm $\|\cdot\|_{\hat{\mathcal{B}}}$ nach Satz 4.3 in [Rud73] aus und setzt die Definition des Vektors γ in (2.9) ein, lässt sich schließlich durch Satz 2.2 und Lemma 3.2 für $t \geqslant 0$ folgende

Abschätzung gewinnen:

$$\begin{aligned}
\left\| {*}\!\int_0^t T^{**}(t-s)(\pi_Q^{**}\gamma)\,dh(s)\right\|_{\mathcal{B}^{**}} &= \sup_{\|\psi\|_{\mathcal{B}^*}\leqslant 1}\left|\langle \psi, {*}\!\int_0^t T^{**}(t-s)(\pi_Q^{**}\gamma)\,dh(s)\rangle\right| \\
&= \sup_{\|\psi\|_{\mathcal{B}^*}\leqslant 1}\left|\int_0^t \langle \psi, T^{**}(t-s)(\pi_Q^{**}\gamma)\rangle\,dh(s)\right| \\
&= \sup_{\|\psi\|_{\mathcal{B}^*}\leqslant 1}\left|\int_0^t \langle T^{*}(t-s)(\pi_Q^{*}\psi), \gamma\rangle\,dh(s)\right| \\
&= \sup_{\|\psi\|_{\mathcal{B}^*}\leqslant 1}\left|-\int_0^t [T^{*}(t-s)(\pi_Q^{*}\psi)]^{\tilde{}}(0-)\,dh(s)\right| \\
&= \sup_{\|\psi\|_{\mathcal{B}^*}\leqslant 1}\left|-\int_0^t y(s-t,[\pi_Q^{*}\psi]^{\tilde{}}\,)\,dh(s)\right| \\
&\leqslant 2\,\|h\|_{C[0,t]}\sup_{\|\psi\|_{\mathcal{B}^*}\leqslant 1}\left\{\mathrm{TV}\left[y(\cdot,[\pi_Q^{*}\psi]^{\tilde{}}\,),[-t,0]\right]\right\} \\
&\leqslant 2c_2\,\|h\|_{C[0,t]}\left(M(t)+\int_0^t M(t-u)e^{(c'+\varepsilon)u}\,du\right)
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c_2 = c_2(\varepsilon) > 0$. □

Endliches Gedächtnis 3.4 In Beispiel 4.2.7 wird eine affine Differentialgleichung mit endlichem Gedächtnis auf dem Raum $\mathcal{B} = (C[-\alpha,0]\times L^1_g)(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}^d)$ mit $g=0$ betrachtet. Nach Beispiel 2.2.6 kann für diesen Phasenraum $\mathcal{B}$ die Funktion M als eine Konstante gewählt werden. Für die Störfunktion $h\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ gelte $\sup\{|h(s)| : s\in[0,t]\} = \mathcal{O}(e^{(\kappa+\varepsilon)t})$ für $t\to\infty$ für ein $\kappa\geqslant 0$ und jedes $\varepsilon>0$. Dann folgt aus Satz 3.3 für die Lösung x der affinen Gleichung (4.2.7) mit endlichem Gedächtnis für $t\geqslant 0$:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\,\|\pi_Q x_t\|_{C[-\alpha,0]}\leqslant \kappa\vee c'.$$

Dies entspricht der Aussage des Lemmas 11 in [MS90].

4 Die Lyapunov-Exponenten

Mit den Abschätzungen auf den beiden Unterräumen $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ und $\hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ des vergangenen Abschnittes lässt sich das Verhalten der Lösung der Gleichung (1.1) bestimmen. Wir fassen das Ergebnis in einem allgemein formulierten Resultat zusammen, während in dem nachfolgenden Abschnitt, in dem die analoge stochastische Differentialgleichung betrachtet wird, die Parameter einer typischen Situation entsprechend gewählt werden.

Satz 4.1
Für $c>\beta_{\mathcal{B}}$ sei $\Lambda = \{\lambda\in\sigma(\hat{\mathrm{A}}) : Re\,\lambda\geqslant c\}$ gegeben durch $\Lambda = \Lambda_1\cup\cdots\cup\Lambda_p$ mit $\Lambda_i = \{\lambda\in\sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) : Re\,\lambda = v_i\}$ und $v_1>\cdots>v_p$. Bezüglich Λ_i bezeichne $\mathbf{\Psi}_i$ die Basen

von $(\hat{Q}_{\Lambda_i})^{\perp}$ bei Zerlegungen $\hat{\mathcal{B}} = \hat{P}_{\Lambda_i} \oplus \hat{Q}_{\Lambda_i}$ für $i = 1, \dots, p$ gemäß Satz 2.4.12 sowie Y_{Λ_i} die in (3.17) definierten Funktionen. Für jedes $\varepsilon > 0$ und für $t \to \infty$ gelte

$$\|h\|_{C[0,t]} = O(e^{(\kappa+\varepsilon)t}) \quad \text{für ein } \kappa < v_p,$$
$$M(t) + \int_0^t M(t-u) e^{(c'+\varepsilon)u} du = \mathcal{O}(e^{(\theta-\kappa+\varepsilon)t}) \quad \text{für ein } \theta < v_p,$$

mit $c' := \sup\{\lambda \in \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}} \ : \ Re\ \lambda < c\} \vee \beta_{\mathcal{B}}$. Dann folgt für die Lösung $x = x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichung (1.1) zu einem $\varphi \in \mathcal{B}$,

a) *falls $\langle \mathbf{\Psi}_i, \hat{\varphi} \rangle = Y_{\Lambda_i}(0)$ für $i = 1, \dots, l-1$, $l \in \{1, \dots, p\}$, und $\langle \mathbf{\Psi}_l, \hat{\varphi} \rangle \neq Y_{\Lambda_l}(0)$:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log \|\hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}}}{t} = v_l;$$

b) *falls $\langle \mathbf{\Psi}_i, \hat{\varphi} \rangle = Y_{\Lambda_i}(0)$ für $i = 1, \dots, p$:*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \|\hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}}}{t} \leqslant \kappa \vee c' \vee \theta.$$

Beweis: Für die Zerlegung $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ gemäß Satz 2.4.12 bezüglich $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_p$ bezeichne π_P und π_Q die Projektionen in (2.11) und (2.12). Satz 3.3 impliziert für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_Q \hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}} \leqslant (c' \vee \theta) + 2\varepsilon. \tag{4.24}$$

Nach Satz 3.1 gilt unter den Voraussetzungen von a:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_P \hat{x}_t + \pi_Q \hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \left(\|\pi_P \hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}} (1 + o(1)) \right) \\
&= v_l.
\end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen in b folgt mit Satz 3.1

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_P \hat{x}_t\|_{\hat{\mathcal{B}}} \leqslant \kappa,$$

woraus in Verbindung mit (4.24) die Behauptung b folgt. □

5 Stochastische Differentialgleichungen

Falls der Phasenraum die Bedingungen B und C erfüllt, überträgt sich das Ergebnis des Satzes 4.1 pfadweise auf die Lösung X der affinen stochastischen Differentialgleichung (4.2.8). Wegen Bemerkung 2.4.15 kann ohne Weiteres von einem reellen Phasenraum ausgegangen werden.
Für eine typische Situation geben wir die Anwendung des Satzes 4.1 auf die stochastische Gleichung an, halten jedoch zunächst folgende Bemerkung fest:

Bemerkung 5.1 Für eine Zerlegung $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ gemäß Satz 2.4.12 bezüglich $\Lambda \subseteq \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_{\beta_\mathcal{B}}$ bezeichnen π_P und π_Q die Projektionen nach (2.11) und (2.12). Dann ist die Projektion auf $\hat{\mathrm{P}}_\Lambda$ der Lösung $X = X(\cdot, \Phi)$ von (4.2.8) nach Korollar 2.13 P-f.s. für $t \geqslant 0$ gegeben durch $\pi_P X_t = \hat{\mathbf{\Phi}}_\Lambda U_\Lambda(t)$, wobei der Koordinatenprozess U_Λ ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess der folgenden Form für $t \geqslant 0$ ist:

$$U_\Lambda(t) = e^{G_\Lambda t}\langle \mathbf{\Psi}_\Lambda, \Phi\rangle - \int_0^t e^{G_\Lambda(t-s)}\widetilde{\mathbf{\Psi}}_\Lambda(0-)\, dW(s).$$

Satz 5.2
Es sei $\mathcal{B}$ ein Phasenraum, der die Bedingungen B und C erfüllt, mit $\beta_\mathcal{B} < 0$ und einer beschränkten Funktion M. Die Menge $\sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_0$ sei gegeben durch $\Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_p$ mit $\Lambda_i = \{\lambda \in \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) : \mathrm{Re}\,\lambda = v_i\}$ und $v_1 > \cdots > v_p$. Bezüglich Λ_i bezeichne $\mathbf{\Psi}_i$ die Basis von $(\hat{Q}_{\Lambda_i})^\perp$ bei Zerlegung $\hat{\mathcal{B}} = \hat{P}_{\Lambda_i} \oplus \hat{Q}_{\Lambda_i}$ sowie Y_{Λ_i} die in (3.17) definierte Funktion. Es folgt für die Lösung $X = X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung (4.2.8) zu einem $\Phi \in \mathcal{B}$ für P-f.a. $\omega \in \Omega$:

a) *falls $\langle \mathbf{\Psi}_i, \hat{\Phi}(\omega)\rangle = Y_{\Lambda_i}(0)(\omega)$ für $i = 1, \ldots, l-1$ und $l \in \{1, \ldots, p\}$ sowie $\langle \mathbf{\Psi}_l, \hat{\Phi}(\omega)\rangle \neq Y_{\Lambda_l}(0)(\omega)$, dann folgt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log \left\| \hat{X}_t(\omega) \right\|_{\hat{\mathcal{B}}}}{t} = v_l;$$

b) *falls $\langle \mathbf{\Psi}_i, \hat{\Phi}(\omega)\rangle = Y_{\Lambda_i}(0)(\omega)$ für $i = 1, \ldots, p$, dann folgt:*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \left\| \hat{X}_t(\omega) \right\|_{\hat{\mathcal{B}}}}{t} \leqslant 0.$$

c) *die Bedingung in a ist mit Wahrscheinlichkeit eins für $l = 1$ erfüllt:*

$$P\left(\langle \mathbf{\Psi}_1, \hat{\Phi}\rangle \neq Y_{\Lambda_1}(0)\right) = 1.$$

Beweis: Die Aussagen a und b folgen aus Satz 4.1.
Es ist $Y_{\Lambda_1}(0)$ eine absolutstetig verteilte Zufallsvariable, da sie normalverteilt ist. Wegen der Unabhängkeit von $\langle \mathbf{\Psi}_1, \hat{\Phi} \rangle$ und $Y_{\Lambda_1}(0)$ folgt die Behauptung c. $\square$

Bemerkung 5.3 Für Phasenräume $\mathcal{B}$ von gleichmäßig verblassendem Gedächtnis ist $\beta_{\mathcal{B}} < 0$ nach Bemerkung 2.5.2. Die Funktion M kann nach Proposition 7.1.5 in [HMN91] konstant gewählt werden. Es sind gerade die Bedingungen des Satzes 5.2 erfüllt.

Zum Abschluss dieses Kapitels soll eine weitere Anwendung des hier vorgestellten Zugangs mittels des schwach*-Integrals angedeutet werden. Für eine Zerlegung $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathrm{P}}_\Lambda \oplus \hat{\mathrm{Q}}_\Lambda$ bezüglich $\Lambda \subseteq \sigma_P(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathbb{C}_{\beta_{\mathcal{B}}}$ wird in Bemerkung 5.1 die Projektion $\pi_P X_t$ der Lösung X einer beliebigen Gleichung (4.2.8) mit unendlichem Gedächtnis für $t \geqslant 0$ durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess charakterisiert.
Im Fall eines endlichen Gedächtnisses der Länge $\alpha \geqslant 0$ wird in Satz 3 in [MSW86] gezeigt, dass die komplementäre Projektion $\pi_Q X_t$ in der zugrunde gelegten Norm $\|\cdot\|_{B[0,\alpha]}$ im quadratischen Mittel für $t \to \infty$ gegen einen stationären Gauß-Prozess konvergiert. Hierbei gehen Methoden ein, die speziell von dem Raum $B([-\alpha, 0], \mathbb{R}^d)$ (beziehungsweise $C([-\alpha, 0], \mathbb{R}^d)$ der zugelassenen Anfangsbedingungen ausgehen. Es bietet sich an, die Darstellung der Lösung einer affinen Gleichung mit unendlichem Gedächtnis im Bidualraum zu nutzen, um im Fall eines unendlichen Gedächtnisses für axiomatisch beschriebene Phasenräume ein analoges Resultat zu erzielen.

Kapitel 7

Parameterabhängige Gleichungen

In Satz 3.2 wird ein Resultat erzielt, das die Konvergenz der Lösungen von parameterabhängigen affinen deterministischen Differentialgleichungen gewährleistet. Die Anwendung dieses Resultates erfordert eine Modifikation, die wir in Korollar 3.4 präsentieren, um Fragen wie die Approximation der Lösung einer affinen Gleichung durch einfach zu bestimmende Funktionen und den Übergang von einem unendlichen Gedächtnis auf ein endliches Gedächtnis zu behandeln. Da eine große Klasse von affinen Gleichungen auf Integraloperatoren basiert, wird für diese Gleichungen ein entsprechendes Ergebnis in Satz 4.3 gewonnen, um ebenfalls die Frage der Approximation zu behandeln.

Durch Methoden der stochastischen Analysis wird in Satz 6.1 ein Resultat erzielt, das die Konvergenz im quadratischen Mittel der Lösungen parameterabhängiger nicht-linearer stochastischer Differentialgleichungen mit Gedächtnis gewährleistet, wie sie in Abschnitt 4.1 behandelt werden. In Verbindung mit den zuvor betrachteten parameterabhängigen deterministischen Differentialgleichungen ergibt sich ein Ergebnis, das die Konvergenz der Lösungen von parameterabhängigen affinen stochastischen Differentialgleichungen mit Gedächtnis sowohl im quadratischen Mittel als auch pfadweise impliziert.

1 Einleitung

In zahlreichen Anwendungen wird die Vergangenheit von Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis durch Quasi-Polynome gewichtet, wie sie in Kapitel 5 behandelt werden, ohne dass das Modell explizit eine Gewichtung durch Quasi-Polynome nahelegt. Diese "Universalrolle" der Quasi-Polynome wird unter Anderem in diesem Kapitel begründet, indem wir die Lösung einer linearen Differentialgleichung mit beliebig gewichteter Vergangenheit als Grenzwert der Lösungen von Gleichungen mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit nachweisen.

Allgemeiner werden parameterabhängige Gleichungen betrachtet und nach hinreichenden Bedingungen gefragt, die eine geeignete Konvergenz der Lösungen implizieren. Es bezeichnen $x^n(\cdot,\varphi^n,h)$ und $x(\cdot,\varphi,h)$ die Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$x^n(t) = \varphi^n(0) + \int_0^t L_n(x_s^n)\,ds + h(t), \quad t \geqslant 0, \quad x_0^n = \varphi^n \in \mathcal{B}, \tag{1.1}$$

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t L(x_s)\,ds + h(t), \quad t \geqslant 0, \quad x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{1.2}$$

mit Anfangsbedingungen φ^n, φ aus einem Phasenraum $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$. Die Funktion $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}^d$ ist eine stetige Funktion mit $h(0) = 0$ und die Operatoren L_n, L sind aus $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$.
Für die Lösungen $x^n(\cdot,\varphi^n,h)$ und $x(\cdot,\varphi,h)$ der Gleichungen (1.1) und (1.2) wird in diesem Kapitel die *lokal gleichmäßige Konvergenz*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} |x^n(t,\varphi^n,h) - x(t,\varphi,h)| = 0 \quad \text{für jedes } T \geqslant 0 \tag{1.3}$$

betrachtet. Die lokal gleichmäßige Konvergenz definiert für Anwendungen, insbesondere für die numerische Approximation einer Lösung durch einfache Funktionen, einen anschaulichen Abstandsbegriff.
Eine andere Form der Konvergenz, die wir hier nicht untersuchen, aber als Ausblick formulieren wollen, ist die lokal gleichmäßige Konvergenz der Vergangenheiten:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|x_t^n(\cdot,\varphi^n,h) - x_t(\cdot,\varphi,h)\|_{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{für jedes } T \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Resultate vom Typ eines Trotter-Kato-Satzes (Satz 3.4.8 in [EN00]) erlauben einen halbgruppentheoretischen Zugang bei Behandlung dieser Konvergenz. Wegen der Bedingung A.b an einen Phasenraum gelten die folgenden Implikationen:

$$(1.4) \quad \Rightarrow \quad (1.3) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x^n(t,\varphi^n,h) - x(t,\varphi,h)| = 0 \quad \text{für jedes } t \geqslant 0.$$

Grundlegend für jede Konvergenz ist aufgrund der Formel der Variation der Konstanten für Lösungen der Gleichungen (1.1) und (1.2) nach Satz 4.2.5 die Konvergenz der Differential-Resolventen.

2 Konvergenz der Differential-Resolvente

Für Operatoren $L_n, L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ existieren nach Satz 2.3.1 lokal endliche Maße $\nu, \nu_n \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} L_n\psi &= \int \nu_n(du)\,\psi(u) \quad \text{für alle } \psi \in C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d), \\ L\psi &= \int \nu(du)\,\psi(u) \quad \text{für alle } \psi \in C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Schwache oder vage Konvergenz der Maße ν_n gegen ν in der Darstellung (2.5) wird sich im späteren Verlauf als hinreichend für die Konvergenz der Differential-Resolventen der Maße ν_n erweisen. Die vage und schwache Konvergenz der Maße ist gerade die schwach*-Konvergenz der Funktionalanalysis auf den dualen Paaren $(C_b(\mathbb{R}_-), M(\mathbb{R}_-))$ und $(C_c(\mathbb{R}_-), M_{loc}(\mathbb{R}_-))$. Wir behalten jedoch den maßtheoretischen Terminus bei und definieren wie in [Bau92] oder [Kal02] bei Übertragung auf den matrixwertigen Fall:

Definition 2.1

a) *Eine Folge* $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ *heißt* vag konvergent *gegen ein Maß* $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$*, wenn gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int d\nu_n\, f = \int d\nu\, f \quad \text{für jedes } f \in C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d).$$

Als Notation wird $\nu_n \xrightarrow{v} \nu$ *für* $n \to \infty$ *benutzt.*

b) *Eine Folge* $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ *heißt* schwach konvergent *gegen ein Maß* $\nu \in M(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$*, wenn gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int d\nu_n\, f = \int d\nu\, f \quad \text{für jedes } f \in C_b(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d).$$

Als Notation wird $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$ *für* $n \to \infty$ *benutzt.*

Bemerkung 2.2 Schwache oder vage Konvergenzen von matrixwertigen Maßen lassen sich zurückführen auf die jeweilige Konvergenz der einzelnen Komponenten. Für ein komplexwertiges Maß sind die Konvergenzen auf die Konvergenzen des Real- und Imaginärteil des Maßes zurückzuführen.

Endliches Gedächtnis 2.3 Im Falle eines endlichen Gedächtnisses ist in Lemma 2.3.5 in [Put01] die lokal gleichmäßige Konvergenz der Fundamentallösung gezeigt, falls die Maße ν_n und ν, die in diesem Fall kompakte Träger besitzen, schwach gegeneinander konvergieren.

Ersetzt man die in Lemma 2.3.5 in [Put01] geforderte schwache Konvergenz der endlichen Maße durch die Forderung nach vager Konvergenz der lokal endlichen Maße ν_n gegen ν, lässt sich analog die Konvergenz der Differential-Resolventen zeigen. Durch die in Kapitel 3 vorgestellte Theorie der Volterra-Gleichungen kann man diese Voraussetzung abschwächen und den Nachweis der Aussage erheblich vereinfachen. Wir führen in Analogie zu Verteilungsfunktionen für lokal endliche Maße $\nu, \nu_n \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ die folgenden Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}^{d\times d}$ ein:

$$\begin{aligned} G_n(s) &:= G_{\nu_n}(s) := \int_{(-s,0]} \nu_n(du) \quad \text{für } s \geqslant 0, \\ G(s) &:= G_\nu(s) := \int_{(-s,0]} \nu(du) \quad \text{für } s \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Für ein beliebiges Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ ist die Funktion G_ν linksstetig mit rechtsseitigen Limiten und besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Nach dem folgenden Satz impliziert eine geeignete Konvergenz der Funktionen G_n und G die lokal gleichmäßige Konvergenz der Differential-Resolventen. Das Resultat ist in [GLS90] erwähnt, der fehlende Beweis ist hier ergänzt. Dass die geforderte Konvergenz der Funktionen G_n eine schwächere Bedingung als die der vagen Konvergenz der Maße ν_n darstellt, wird in Beispiel 2.6 demonstriert.
Unter der *lokalen Konvergenz* von Funktionen f_n eines Funktionenraumes $F(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^k)$, $k \in \mathbb{N}$, wird stets die Konvergenz der eingeschränkten Funktionen $f_n|_{[0,T]}$ in der Norm von $F([0,T], \mathbb{K}^k)$ für jedes $T \geqslant 0$ bezeichnet. Auf die Notation der Einschränkung der Funktionen wird verzichtet.

Satz 2.4
Es gelte für die mit Maßen ν, $\nu_n \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ in (2.6) definierten Funktionen

$$\lim_{n\to\infty} \|G_n - G\|_{L^1[0,T]} = 0 \quad \text{für jedes } T \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Dann folgt für die Differential-Resolventen r_n und r der Maße ν_n und ν:

a) $\lim_{n\to\infty} \|r_n - r\|_{C[0,T]} = 0 \quad$ *für $T \geqslant 0$;*

b) $\lim_{n\to\infty} \|\dot{r}_n - \dot{r}\|_{L^1[0,T]} = 0 \quad$ *für $T \geqslant 0$.*

Beweis: a) Es existieren nach Satz 2.3.1 in [GLS90] eindeutig bestimmte Funktionen $q_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}^{d\times d}$, die den Gleichungen $q_n(t) - \int_0^t q_n(t-s)G_n(s)\,ds = -G_n(t)$ für (Lebesgue) fast alle $t \geqslant 0$ genügen. Durch Differentiation des Integraltermes zum einen nach der Formel für parameterabhängige Integrale und zum anderen nach der Formel für Faltungsintegrale (siehe Beweis zu Satz 3.3.1 in [GLS90]) ergeben sich die Differential-Resolventen r_n und r für $t \geqslant 0$ als:

$$r_n(t) = \mathrm{I}_d - \int_0^t q_n(s)\,ds \quad \text{und} \quad r(t) = \mathrm{I}_d - \int_0^t q(s)\,ds,$$

wobei q die eindeutige Funktion ist, die der Gleichung $q(t) - \int_0^t q(t-s)G(s)\,ds = -G(t)$ für (Lebesgue) fast alle $t \geqslant 0$ genügt. Da die Funktionen q_n und q nach Satz 2.3.1 in [GLS90] in der Topologie des Raumes $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d})$ stetig von den Funktionen G_n und G abhängen, folgt die Behauptung.
b) Ergibt sich aus dem Beweis der Aussage a. □

Die lokale Konvergenz der Funktionen G_{ν_n} in $L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}^{d\times d})$ gemäß (2.7) wird im Folgenden in bestehende Konvergenzbegriffe eingeordnet.

Satz 2.5
Konvergiert eine Folge von Maßen $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ für $n \to \infty$ vag gegen ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$, dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \|G_{\nu_n} - G_\nu\|_{L^1[0,T]} = 0 \quad \text{für jedes } T \geqslant 0.$$

Beweis: Ohne Einschränkung gelte $\nu_n \xrightarrow{v} 0$ für $n \to \infty$. Aus der vagen Konvergenz der Maße ν_n folgt die vage Konvergenz des Produktmaßes $\nu_n \otimes \nu_n \xrightarrow{v} 0$ für $n \to \infty$. Man erhält mittels des Satzes von Fubini für $T \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^T (G_{\nu_n}(s))^2\,ds &= \int_0^T \left(\iint_{[-T,0]^2} \mathbb{1}_{(-s,0]}(u_1)\,\mathbb{1}_{(-s,0]}(u_2)\,(\nu_n\otimes\nu_n)(du_1,du_2)\right) ds\\ &= \iint_{[-T,0]^2} (T+\min\{u_1,u_2\})\,(\nu_n\otimes\nu_n)(du_1,du_2)\\ &\to 0 \quad \text{für } n\to\infty,\end{aligned}$$

da die Funktion

$$(u_1,u_2) \mapsto (T+\min\{u_1,u_2\})\,\mathbb{1}_{[-T,0]^2}(u_1,u_2) \quad \text{für } u_1,u_2 \leqslant 0,$$

stetig ist und einen kompakten Träger in $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ besitzt. □

Beispiel 2.6 Dass die umgekehrte Implikation in Satz 2.5 nicht gilt, zeigt die Wahl der Folge

$$\nu_n(du) := \sqrt{n}\ \delta_0(du) - \sqrt{n}\ \delta_{-1/n}(du) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Folge von Maßen $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht vag, jedoch gilt für $T > 1$

$$\|G_{\nu_n}\|_{L^1[0,T]} = \sqrt{n}\int_0^{1/n} du = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{für } n\to\infty.$$

Bemerkung 2.7 Für ein positives, skalares Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+)$ ist die Funktion G_ν monoton wachsend. In diesem Fall lässt sich in Analogie zu Wahrscheinlichkeitsmaßen und Verteilungsfunktionen ein ähnliches Resultat wie der Satz von Alexandroff (Satz 4.25 in [Kal02]) gewinnen. Als Konsequenz erhält man die Äquivalenz der vagen Konvergenz von positiven Maßen ν_n und der lokalen Konvergenz der Funktionen G_{ν_n} in $L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

Eine Motivation dieses Kapitels ist die Approximation von Lösungen einer Differentialgleichung mit Gedächtnis durch Lösungen von Gleichungen mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit. Grundlage ist die Eigenschaft von Maßen mit einem Quasi-Polynom gemäß Definition 5.1.1 als Dichte, bezüglich der vagen Topologie dicht im Raum $M_{loc}(\mathbb{R}_-,\mathbb{R}_+)$ zu liegen. Für $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}_-$ und $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{K}$, $k\in\mathbb{N}$, wird das Maß

$$\mu(du) := \sum_{i=1}^k \alpha_i\,\delta_{x_i}(du) \tag{2.8}$$

definiert, das als *diskretes Maß in* $M_{loc}(\mathbb{R}_-,\mathbb{K})$ bezeichnet wird. Das folgende Resultat ist in verschiedenen Formen bekannt und hier einheitlich für matrixwertige lokal endliche Maße formuliert.

Satz 2.8

a) *Für jedes Punktmaß δ_x mit $x < 0$ gilt für $n \to \infty$:*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u)\frac{\alpha}{n!}\left(\frac{n+1}{-x}\right)^{n+1}(-u)^n \exp\left(\frac{n+1}{-x}u\right)\,du \xrightarrow{w} \delta_x. \tag{2.9}$$

Für das Punktmaß δ_0 gilt für $n \to \infty$:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u) n\alpha \exp(nu)\,du \xrightarrow{w} \delta_0. \tag{2.10}$$

b) *Für jedes Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ existieren Maße $\nu_n \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$\nu_n = (\nu_n^{lk})_{l,k=1}^d \quad \text{und} \quad \nu_n^{lk}(du) := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u)\sum_{i=1}^{m_n}\frac{a_{i,n}}{n_{i,n}!}(-u)^{n_{i,n}}e^{\gamma_{i,n}u}\,du, \tag{2.11}$$
$$\gamma_{i,n} := \gamma_{i,n}^{lk} \in \mathbb{R}, \quad \alpha_{i,n} := \alpha_{i,n}^{lk} \in \mathbb{K}, \quad n_{i,n} \in \mathbb{N} \text{ für } i = 1, \ldots, m_n,$$

so dass $\nu_n \xrightarrow{v} \nu$ für $n \to \infty$.

Ist das Maß ν endlich, so sind die Maße ν_n endlich und konvergieren schwach gegen ν.

Beweis: a) Lässt sich mittels charakteristischen Funktion nachweisen.
b) Sei zunächst $d = 1$ und $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+)$ ein positives, reellwertiges Maß. Nach Satz 30.4 in [Bau92] liegt die Menge der diskreten Maße dicht in $M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+)$ bezüglich der vagen Topologie. Da der Raum $M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+)$ nach Satz 31.5 in [Bau92] bezüglich der vagen Topologie metrisierbar ist, existiert eine Folge $\{\mu_n\}$ von diskreten Maßen der Form (2.8), die vag gegen das Maß ν konvergieren. Falls das Maß ν endlich ist, findet die Konvergenz der diskreten Maße μ_n nach den Sätzen 30.5 und 30.8 in [Bau92] sogar schwach statt. Aus der Aussage a folgt die vage beziehungsweise schwache Konvergenz der Maße ν_n der Form (2.11).
Für ein reellwertiges Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ folgt aus der σ-Endlichkeit von ν die Hahn-Zerlegung $\nu = \nu^+ - \nu^-$ mit $\nu^+, \nu^- \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+)$ nach Satz 2.8 in [Kal02]. Bemerkung 2.2 beendet den Beweis für beliebige Maße $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$. □

3 Konvergenz für allgemeine Operatoren

In diesem Abschnitt wird ein Konvergenzresultat erzielt, ohne weitere Voraussetzungen an die Funktionale $L_n \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ zu stellen. Im folgenden Abschnitt dagegen wird von Operatoren L_n ausgegangen, die eine Darstellung als Integraloperatoren auf $\mathcal{B}$ besitzen. Grundlage des Resultates dieses Abschnittes ist das folgende einfache Lemma, das auf dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 2.5 in [Rud73]) und der Bedingung A.d an einen

Phasenraum basiert. Der Begriff einer zulässigen Funktion für einen Phasenraum wird in Definition 2.2.1 eingeführt.

Lemma 3.1
Es seien $\mathcal{B}$ ein vollständiger Phasenraum und L_n, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ Operatoren mit

$$\lim_{n\to\infty} |(L_n - L)\varphi| = 0 \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathcal{B}\,. \tag{3.12}$$

Dann gilt für jede für $\mathcal{B}$ zulässige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^d$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in[0,T]} |L_n(x_s) - L(x_s)| = 0 \quad \text{für alle } T \geqslant 0. \tag{3.13}$$

Beweis: Zunächst wird begründet, dass für eine zulässige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^d$ die Menge

$$K := \{\hat{x}_s : \, s \in [0,T]\}$$

kompakt in $\hat{\mathcal{B}}$ liegt. Denn für eine beliebige Folge $\{\hat{x}_{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ existiert eine Teilfolge $\{s'_n\} \subseteq \{s_n\}$ und $s \in [0,T]$ mit $s'_n \to s \in [0,T]$ für $n \to \infty$. Aufgrund der Bedingung A.d an den Phasenraum $\mathcal{B}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \hat{x}_{s'_n} = \hat{x}_s \in K.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 2.5 in [Rud73]) gilt:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\hat{L}_n\|_{\hat{\mathcal{B}}\to\mathbb{K}^d} < \infty. \tag{3.14}$$

Nehmen wir an, dass die Aussage der lokal gleichmäßigen Konvergenz (3.13) für x nicht gilt, folgt die Existenz einer Folge $\{s_n\} \subseteq [0,T]$ und einer Konstanten $\varepsilon > 0$ mit

$$|(\hat{L}_n - \hat{L})\hat{x}_{s_n}| > \varepsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.15}$$

Aufgrund der Kompaktheit von K existiert eine Teilfolge von $\{s_n\}$, die wieder mit $\{s_n\}$ bezeichnet wird, und ein $s \in [0,T]$, so dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{x}_{s_n} - \hat{x}_s\|_{\hat{\mathcal{B}}} = 0.$$

Mit der punktweisen Konvergenz (3.12) und (3.14) erhält man

$$\begin{aligned}
\varepsilon &< |(\hat{L}_n - \hat{L})\hat{x}_{s_n}| \\
&\leqslant |(\hat{L}_n - \hat{L})(\hat{x}_{s_n} - \hat{x}_s)| + |(\hat{L}_n - \hat{L})\hat{x}_s| \\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\hat{L}_n - \hat{L}\|_{\hat{\mathcal{B}}\to\mathbb{K}^d} \, \|\hat{x}_{s_n} - \hat{x}_s\|_{\hat{\mathcal{B}}} + |(\hat{L}_n - \hat{L})\hat{x}_s| \\
&\to 0 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme (3.15). □

Das folgende Resultat gibt hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Lösungen der Gleichungen (1.1) an.

Satz 3.2
Es seien $\mathcal{B}$ ein vollständiger Phasenraum und L_n, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ Operatoren mit

$$\lim_{n\to\infty} |(L_n - L)\psi| = 0 \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{B}\,. \tag{3.16}$$

Für die Anfangsbedingungen $\varphi^n, \varphi \in \mathcal{B}$ gelte

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi^n - \varphi\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

Dann folgt für die Lösungen $x^n(\cdot,\varphi^n,h)$ und $x(\cdot,\varphi,h)$ der Gleichungen (1.1) und (1.2):

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n(\cdot,\varphi^n,h) - x(\cdot,\varphi,h)\|_{C[0,T]} = 0 \quad \text{für } T \geqslant 0.$$

Beweis: Es werden die Funktionale $L_n, L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ gemäß (2.5) durch die Maße $\nu_n, \nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ als Integraloperatoren dargestellt und es bezeichnen r_n und r die Differential-Resolventen der Maße ν_n und ν.
Mit den Sätzen 2.3.3 und 4.2.5 erhält man eine Formel der Variation der Konstanten für die Lösungen $x^n = x^n(\cdot,\varphi^n,h)$ und $x = x(\cdot,\varphi,h)$, so dass sich die Differenz für $T \geqslant 0$ abschätzen lässt durch:

$$\begin{aligned}\|x^n - x\|_{C[0,T]} \leqslant |\varphi^{\mathrm{n}}(0) - \varphi(0)| &+ \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (r_n(t-s) - r(t-s)) L_n(S(s)\varphi^n)\, ds \right| \\ &+ \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t r(t-s)(L_n(S(s)\,\varphi^{\mathrm{n}}) - L(S(s)\varphi))\, ds \right| \\ &+ \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (r_n(t-s) - r(t-s))\, dh(s) \right|,\end{aligned} \tag{3.17}$$

wobei $S(t)$ für $t \geqslant 0$ die Lösungsoperatoren der trivialen Gleichung bezeichnen.
Da nach Lemma 2.2.3 der Raum $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ in $\mathcal{B}$ enthalten ist, impliziert die punktweise Konvergenz (3.16) die vage Konvergenz der Maße ν_n gegen ν und aus den Sätzen 2.5 und 2.4 ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} \|r_n - r\|_{C[0,T]} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|\dot r_n - \dot r\|_{L^1[0,T]} = 0. \tag{3.18}$$

Aus der Bedingung A an den Phasenraum folgt für $s \geqslant 0$:

$$\|S(s)\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \leqslant HM(s) + N(s).$$

Zusammen mit Lemma 3.1 und dem Satz von Banach-Steinhaus impliziert dies

$$\begin{aligned} &\|L_n(S(\cdot)\varphi^n) - L(S(\cdot)\varphi)\|_{C[0,T]} \\ &\quad \leqslant \|L_n(S(\cdot)(\varphi^n - \varphi))\|_{C[0,T]} + \|(L_n - L)(S(\cdot)\varphi)\|_{C[0,T]} \\ &\quad \leqslant \|L_n\|_{\mathcal{B}\to\mathbb{K}^d} \sup_{s\in[0,T]} \|S(s)\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \|\varphi^n - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|(L_n - L)(S(\cdot)\varphi)\|_{C[0,T]} \\ &\quad \to 0 \quad \text{für } n \to \infty, \end{aligned} \tag{3.19}$$

woraus für den zweiten Integralterm in (3.17) folgt:

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t r(t-s)(L_n(S(s)\,\varphi^{\mathrm{n}}) - L(S(s)\varphi))ds \right| \\ &\quad \leqslant T\,\|r\|_{C[0,T]} \sup_{s\in[0,T]} |L_n(S(s)\varphi^n) - L(S(s)\varphi)| \\ &\quad \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Mit der aus (3.19) resultierenden Beschränktheit folgt mit (3.18) für den ersten Integralausdruck in (3.17):

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (r_n(t-s) - r(t-s))L_n(S(s)\varphi^n)ds \right| \\ &\quad \leqslant T\,\|r_n - r\|_{C[0,T]} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n(S(\cdot)\varphi^n)\|_{C[0,T]} \\ &\quad \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Die Konvergenzaussagen in (3.18) garantieren durch partielle Integration die Konvergenz des letzten Termes in (3.17) und Bedingung A.b impliziert die Konvergenz des ersten Termes in (3.17), so dass die Behauptung folgt. □

Die Voraussetzungen des Satzes 3.2 sind naheliegend und gewährleisten ein allgemeines Resultat. Jedoch ist in einigen Anwendungen die geforderte punktweise Konvergenz (3.16) in Satz 3.2 eine zu starke Forderung. Diese lässt sich im Folgenden abschwächen auf vage Konvergenz der Maße, die die Operatoren L_n und L gemäß (2.5) darstellen. Jedoch wird sich in Beispielen zeigen, dass für besonders "irreguläre" Anfangsbedingungen φ die vage Konvergenz nicht mehr ausreicht, um die lokal gleichmäßige Konvergenz der Lösungen zu diesen Anfangsbedingungen zu implizieren.
Als ausreichend "regulär" stellen sich Anfangsbedingungen heraus, die im Abschluss von $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ im Phasenraum $\mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ liegen:

$$\begin{aligned} \overline{C}_c^{\mathcal{B}} &:= \overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) \\ &:= \{\varphi \in \mathcal{B} \;:\; \exists\,\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \|\varphi - \psi^n\|_{\mathcal{B}} = 0\}. \end{aligned}$$

Das folgende Lemma gibt den Abschluss $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ für zwei Phasenräume an.

Lemma 3.3

a) *Für den Phasenraum $\mathcal{B} = C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned}\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) &= \{\varphi \in C(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) : \lim_{u\to-\infty} \left|\varphi(u)e^{-\gamma u}\right| = 0\} \\ &= C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) \quad \textit{mit } g(u) = e^{\gamma u} \textit{ für } u \leqslant 0.\end{aligned}$$

b) *Für den Phasenraum $\mathcal{B} = (C[\rho, 0] \times L_g^p)(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ gilt*

$$\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d) = \mathcal{B}\,.$$

Beweis: a) Für $\varphi \in C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ mit $g(u) = e^{\gamma u}$ für $u \leqslant 0$ und $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$\psi^k(u) := \begin{cases} \varphi(u) & , u \in [-k, 0], \\ 0 & , u \leqslant -k-1, \\ \varphi(-k)u + (k+1)\varphi(-k) & , u \in [-k-1, -k]. \end{cases}$$

Es gilt $\psi^k \in C_c(\mathbb{R}_- \mathbb{K}^d)$ für $k \in \mathbb{N}$. Man erhält

$$\begin{aligned}\|\varphi - \psi^k\|_{C_\gamma} &\leqslant \sup_{u\leqslant -k-1} \left|e^{-\gamma u}\varphi(u)\right| + \sup_{u\in[-k-1,-k]} (e^{-\gamma u}|\varphi(u) - \psi^k(u)|) \\ &\leqslant 2 \sup_{u\leqslant -k} \left|e^{-\gamma u}\varphi(u)\right| + (1 \vee e^\gamma)\, |\varphi(-k)|\, e^{-\gamma k} \\ &\to 0 \quad \text{für } k \to \infty.\end{aligned}$$

b) Eine Funktion $\varphi \in (C[\rho, 0] \times L_g^p)(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ lässt sich zerlegen in

$$\varphi(u) = \begin{cases} \varphi_1(u) & , u \in [\rho, 0], \\ \varphi_2(u) & , u < \rho, \end{cases}$$

mit $\varphi_1 \in C([\rho, 0], \mathbb{K}^d)$ und φ_2 mit $\int_{-\infty}^{\rho} |\varphi(u)|^p\, g(u)\, du < \infty$. Nach Satz 3.13 in [Rud87] existiert eine Folge von einfachen Funktionen $\{\psi^l\}_{l\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{l\to\infty} \int_{-\infty}^{\rho} \left|\psi^l(u) - \varphi_2(u)\right|^p g(u)\, du = 0.$$

Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes nach Satz 2.20 in [Rud73] können die Funktionen ψ^l als Treppenfunktionen auf Intervallen angenommen werden, das heißt als eine endliche Summe von Funktionen $A\, \mathbb{1}_{[a,b]}(\cdot)$ mit $a, b \in (-\infty, \rho]$ und $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$. Für solch eine Treppenfunktion ψ^l existiert eine Folge $\{\xi^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_c((-\infty, \rho], \mathbb{K}^d)$ mit $\xi^k(\rho) = \varphi(\rho)$ und

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\rho} \left|\xi^k(u) - \psi^l(u)\right|^p g(u)\, du = 0.$$

Die Fortsetzung der Funktionen ξ^k auf $[\rho, 0]$ durch die Funktion φ_1 ergibt die Behauptung. $\square$

Korollar 3.4
Es seien $\mathcal{B}$ ein vollständiger Phasenraum und $L_n, L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ Operatoren, die gemäß (2.5) durch die Maße $\nu_n, \nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ dargestellt werden. Es gelte

$$\sup\{|L_n\psi| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \quad \textit{für alle } \psi \in \overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d); \tag{3.20}$$

$$\nu_n \xrightarrow{v} \nu \quad \textit{für } n \to \infty. \tag{3.21}$$

Für Anfangsbedingungen $\varphi^n, \varphi \in \overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi^n - \varphi\|_{\mathcal{B}} = 0$$

folgt für die Lösungen $x^n(\cdot, \varphi^n, h)$ und $x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichungen (1.1) und (1.2):

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n(\cdot, \varphi^n, h) - x(\cdot, \varphi, h)\|_{C[0,T]} = 0 \quad \textit{für } T \geqslant 0.$$

Beweis: Es lässt sich leicht zeigen, dass $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ ein vollständiger Phasenraum mit Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ ist, so dass nur die Voraussetzung (3.16) des Satzes 3.2 nachzuweisen ist. Wegen der Darstellung der Operatoren L_n und L als Integraloperatoren auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ durch die Maße ν_n und ν folgt aus der vagen Konvergenz der Maße:

$$\lim_{n\to\infty} |(L_n - L)\psi| = 0 \quad \text{für } \psi \in C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d). \tag{3.22}$$

Mit dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 2.5 in [Rud73]) und einem üblichen Dichtheitsargument folgt die Konvergenz in (3.22) auch für jede Funktion $\psi \in \overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ und die Behauptung folgt aus Satz 3.2. $\square$

Im Gegensatz zu dem allgemeinen Resultat in Satz 3.2 sind in Korollar 3.4 die Bedingungen stark abgeschwächt und in einer Form, die in vielen Anwendungen leicht zu verifizieren ist. Die Bedingung, nur Anfangsfunktionen im Abschluss $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ des Phasenraumes $\mathcal{B}$ zu betrachten, schließt solche Anfangsfunktionen aus, die "eine zu starke Gewichtung in $-\infty$" im Vergleich zu der geforderten vagen Konvergenz der Maße besitzen. Die Notwendigkeit dieser Bedingung wird im folgenden Beispiel demonstriert. In dem sich anschließenden Beispiel zeigen wir die Notwendigkeit der gleichmäßigen Beschränktheit (3.20) der Operatoren.

Beispiel 3.5 Für $n \in \mathbb{N}$ definiere die folgenden skalaren Maße

$$\nu_n(du) := \mathbb{1}_{[-n-1,-n]}(u)\, du \quad \text{und} \quad \nu(du) := 0,$$

und betrachte die Integraloperatoren

$$L_n\varphi := \int_{(-\infty,0]} \varphi(u)\, \nu_n(du) \quad \text{und} \quad L\varphi := 0. \tag{3.23}$$

Für $\gamma = 0$ sind die Operatoren L_n und L stetig und linear auf dem Phasenraum $\mathcal{B} = C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$. Nach Lemma 3.3 ist der Abschluss $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ durch den Raum $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ mit $g = 1$ der stetigen Funktionen gegeben, die gegen 0 konvergieren. Für $\varphi \in \mathcal{B}$ bezeichne $x^n(\cdot, \varphi)$ und $x(\cdot, \varphi)$ die Lösungen der homogenen Gleichungen

$$\dot{x}^n(t) = L_n(x_t^n), \quad t \geqslant 0, \quad x_0^n = \varphi, \quad \text{und} \quad \dot{x}(t) = L(x_t), \quad t \geqslant 0, \quad x_0 = \varphi. \tag{3.24}$$

Da die Voraussetzungen des Korollars 3.4 erfüllt sind, konvergieren die Lösungen $x^n(\cdot, \varphi)$ lokal gleichmäßig gegen die Lösung $x(\cdot, \varphi)$ für Anfangsbedingungen φ im Abschluss $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) = C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$. Wählt man jedoch als Anfangsbedingung $\psi^0(u) = 1$, $u \leqslant 0$, eine Funktion, die in $C_0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ aber nicht im Abschluss $C_g^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ liegt, so besitzen die Lösungen nach Satz 2.3.3 für $t \geqslant 0$ die Darstellungen:

$$\begin{aligned} x^n(t, \psi^0) &= 1 + \int_0^t r_n(t-s) L_n(S(s)\psi^0) ds = 1 + \int_0^t r_n(t-s)\, ds, \\ x(t, \psi^0) &= 1 + \int_0^t r(t-s) L(S(s)\psi^0) ds = 1, \end{aligned}$$

wobei r_n und r die Differential-Resolventen der Maße ν_n und ν bezeichnen. Die Lösungen $x^n(\cdot, \psi^0)$ konvergieren für $n \to \infty$ nicht gegen $x(\cdot, \psi^0)$, da nach Satz 2.4 die Konvergenz $r_n(t) \to 1$ für $n \to \infty$ gilt.

Beispiel 3.6 (Fortsetzung von 3.5) Es sei $\gamma < 0$. Dann sind die Funktionale L_n und L in (3.23) auch auf dem Phasenraum $\mathcal{B} = C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ stetig und beschränkt. Die konstante Funktion $\psi^0(u) = 1$, $u \leqslant 0$, ist in $C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ enthalten und liegt auch im Abschluss $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$. Es gilt sogar die gleichmäßige Beschränktheit von $L_n\psi^0$:

$$\left| L_n \psi^0 \right| = \int_{-n-1}^{-n} du = 1.$$

Jedoch ist die gleichmäßige Beschränktheit der Operatoren für alle Funktionen φ aus $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ verletzt. Denn die Funktion $\varphi(u) = \exp(\frac{\gamma}{2}u)$, $u \leqslant 0$, ist ein Element des Abschlusses $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$, für die gilt

$$|L_n \varphi| = \exp(-\tfrac{\gamma}{2}n)\tfrac{2}{\gamma}(1 - \exp(-\tfrac{\gamma}{2})) \to \infty \quad \text{für } n \to \infty.$$

Die Voraussetzung (3.20) des Korollars 3.4 ist folglich verletzt. Nach Beispiel 3.5 gilt auch keine Konvergenz der Lösungen der Differentialgleichungen (3.24) zu der Anfangsbedingung ψ^0.

4 Konvergenz für Integraloperatoren

In vielen Anwendungen von Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis sind die Operatoren $L_n \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ nicht nur auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ sondern auf ganz $\mathcal{B}$ als Integraloperatoren gegeben. Diese Darstellung voraussetzend, jedoch auf einem nur axiomatisch beschriebenen Phasenraum, kann das Konvergenzresultat 3.4 aufgrund von

Glättungseigenschaften der Integrale in speziellen Fällen verbessert werden. Es werden in diesem Abschnitt Operatoren der Form

$$\begin{aligned} L_n\varphi &= \int \nu_n(du)\,\varphi(u) \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathcal{B}, \\ L\varphi &= \int \nu(du)\,\varphi(u) \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathcal{B} \end{aligned} \tag{4.25}$$

mit Maßen ν_n, $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ betrachtet. Wir beginnen mit zwei technischen Lemmata:

Lemma 4.1
Für die Funktion

$$\Phi : C([0,T], \mathbb{K}^{d\times d}) \times L^1((-\infty,T], \mathbb{K}^d) \to C([0,T] \times \mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d), \quad T > 0,$$
$$\Phi(f,g)(t,u) := \int_0^t f(t-s)g(s+u)\,ds$$

a) *gilt für* $f \in C([0,T], \mathbb{K}^{d\times d})$ *und* $g_1, g_2 \in L^1((-\infty,T], \mathbb{K}^d)$*:*

$$\|\Phi(f,g_1) - \Phi(f,g_2)\|_{C([0,T]\times\mathbb{R}_-)} \leqslant \|f\|_{C[0,T]}\,\|g_1 - g_2\|_{L^1(-\infty,T]}\,;$$

b) *gilt für* $f \in C([0,T], \mathbb{K}^{d\times d})$ *und* $g \in L^1((-\infty,T], \mathbb{K}^d)$*:*

die Funktion $\Phi(f,g)$ *ist in beiden Variablen gleichgradig stetig.*

Beweis: Erst der Nachweis der zweiten Eigenschaft rechtfertigt den angegebenen Bildbereich der Funktion Φ. Es sei im Folgenden $\Phi(t,u) := \Phi(f,g)(t,u)$.
b) Es sei $h > 0$. Für integrierbare Funktionen $g \in L^1((-\infty,T], \mathbb{K}^d)$ folgt die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion

$$u \mapsto \int_{-\infty}^u |g(s)|\,ds \quad \text{für } u \leqslant T.$$

Mit der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion f auf $[0,T]$ folgt für $t \leqslant T-h$:

$$\begin{aligned} &\sup_{u\leqslant 0} |\Phi(t+h,u) - \Phi(t,u)| \\ &\leqslant \sup_{u\leqslant 0} \int_0^t |f(t+h-s) - f(t-s)|\,|g(s+u)|\,ds + \sup_{u\leqslant 0} \int_t^{t+h} |f(t+h-s)g(s+u)|\,ds \\ &\leqslant \sup_{s\in[0,T-h]} |f(s+h) - f(s)|\,\|g\|_{L^1(-\infty,T]} + \sup_{s\in[0,h]} |f(s)| \sup_{u\leqslant T-h} \int_u^{u+h} |g(s)|\,ds \\ &\to 0 \quad \text{für } h \to \infty. \end{aligned}$$

Dies beweist die gleichgradige Stetigkeit in der ersten Variablen. Für den Nachweis der gleichgradigen Stetigkeit in der zweiten Variablen sei $u \leqslant -h$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} |\Phi(t,u+h)-\Phi(t,u)| &\leqslant \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t |f(t-s)|\,|g(s+u+h)-g(s+u)|\,ds \\ &\leqslant \|f\|_{C[0,T]} \int_u^{T+u} |g(s+h)-g(s)|\,ds \\ &\leqslant \|f\|_{C[0,T]} \left\|\tau_{-|h|}g-g\right\|_{L^1(-\infty,T]},\end{aligned}$$

wobei τ_h den Shiftoperator für $h \in \mathbb{R}$ bezeichnet:

$$\tau_h : L^1(\mathbb{R},\mathbb{K}^d) \to L^1(\mathbb{R},\mathbb{K}^d), \quad (\tau_h g) := g(h+u).$$

Wegen der Stetigkeit der Shiftoperatoren für $h \to 0$ auf $L^1((-\infty,T],\mathbb{K}^d)$, siehe Lemma 2.6.3 in [GLS90], folgt die Behauptung.
a) Folgt aus analogen Abschätzungen wie die Begründung der zweiten Aussage. □

Um nicht nur auf endliche Maße ν_n und ν bei der Darstellung (4.25) der Operatoren L_n und L beschränkt zu sein, wird eine “ausgleichende” Gewichtung von Funktionen aus dem Phasenraum und den zugrunde liegenden Maßen benutzt. Denn ist das Maß $e(b)\,d\nu$ für ein $b \in \mathbb{R}$ endlich, erfolgt das “Gegengewicht” durch Anfangsfunktionen $e(-b)\varphi = \{e^{-bu}\varphi(u) : u \leqslant 0\} \in L^1(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^d)$. Insbesondere auf vollständigen Phasenräumen $\mathcal{B}$ ist nach Satz 2.4.8 das Maß $e(b)\,d\nu$ für $b > \beta_{\mathcal{B}}$ endlich.
Als Vorbereitung auf das Konvergenzresultat beginnen wir mit dem folgenden Lemma:

Lemma 4.2
Es seien $\mathcal{B}$ ein Phasenraum und $L_n, L \in \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathbb{K}^d)$ Integraloperatoren, die gemäß (4.25) auf ganz $\mathcal{B}$ mit den Maßen ν_n, $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^{d\times d})$ dargestellt werden. Für ein $b \in \mathbb{R}$ seien die Maße $e(b)\,d\nu_n$ und $e(b)\,d\nu$ endlich und es gelte:

$$e(b)\,d\nu_n \xrightarrow{w} e(b)\,d\nu \quad \text{für } n \to \infty.$$

Für Funktionen $\varphi^n, \varphi \in \mathcal{B}$, die für $n \in \mathbb{N}$ die Bedingungen

$$\begin{aligned}&e(-b)\varphi^n, e(-b)\varphi \in L^1(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^d);\\ &\lim_{n\to\infty} |\varphi^n(0)-\varphi(0)| = 0;\\ &\lim_{n\to\infty} \|e(-b)(\varphi^n-\varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}_-)} = 0\end{aligned}$$

erfüllen, folgt für $T \geqslant 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t f(t-s)(L_n(S(s)\varphi^n) - L(S(s)\varphi))\,ds \right| = 0 \quad \text{für } f \in C([0,T],\mathbb{K}^{d\times d}).$$

Beweis: Definiere $\mu_n(du) := e(b)\,\nu_n(du)$ und $\mu(du) := e(b)\,\nu(du)$. Nach Voraussetzung konvergiert μ_n schwach gegen μ für $n \to \infty$ und damit ist $\sup\{\|\mu_n\|_{TV} : n \in \mathbb{N}\}$ endlich. Definiere die Funktionen

$$g^n(s) := \begin{cases} e^{-bs}\varphi^n(s) & , s \leqslant 0, \\ e^{-bs}\varphi^n(0) & , s \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad g(s) := \begin{cases} e^{-bs}\varphi(s) & , s \leqslant 0, \\ e^{-bs}\varphi(0) & , s \geqslant 0. \end{cases}$$

Nach Voraussetzung gilt $g_n,\, g \in L^1((-\infty, T], \mathbb{K}^d)$ für $T \geqslant 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|g^n - g\|_{L^1(-\infty,T]} = 0.$$

Die auftretenden Integrale der Behauptung sind wohldefiniert, da für $t \geqslant 0$ gilt:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} |f(t-s)(S(s)\varphi^n)(u)|\; |\nu_n|(du)\, ds \\ &\qquad \leqslant \int_0^t e^{bs} \int_{\mathbb{R}_-} |f(t-s) g^n(s+u)|\; |\mu_n|(du)\, ds \\ &\qquad \leqslant e^{bt\vee 0}\, \|f\|_{C[0,T]} \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^t |g^n(s+u)|\; ds\; |\mu_n|(du) \\ &\qquad \leqslant \|f\|_{C[0,T]}\, \|g^n\|_{L^1(-\infty,t]}\, \|\mu_n\|_{TV}\,, \end{aligned}$$

wodurch auch die Anwendung des Satzes von Fubini im Folgenden gerechtfertigt ist. Es bezeichne Φ die in Lemma 4.1 definierte Funktion. Durch den Satz von Fubini erhält man für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t f(t-s) \left(\int_{\mathbb{R}_-} \nu_n(du)\, (S(s)\varphi^n)(u) - \int_{\mathbb{R}_-} \nu(du)\, (S(s)\varphi)(u) \right) ds \right| \\ &\qquad \leqslant e^{bt} \left| \int_{\mathbb{R}_-} \mu_n(du)\, \Phi(e(-b)f, g^n - g)(t,u) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}_-} (\mu_n - \mu)(du)\, \Phi(e(-b)f, g)(t,u) \right|. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Für das erste Integral folgt aus Lemma 4.1.a die gleichmäßige Konvergenz in $t \in [0,T]$ für $n \to \infty$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}_-} \mu_n(du)\, \Phi(e(-b)f, g^n - g)(t,u) \right| \leqslant \|e(-b)f\|_{C[0,T]}\, \|g^n - g\|_{L^1(-\infty,T]}\, \|\mu_n\|_{TV} \to 0.$$

Die punktweise Konvergenz für $t \in [0,T]$ des zweiten Integrals in (4.26) folgt aus der schwachen Konvergenz der Maße und der Stetigkeit und Beschränktheit der Funktion $\Phi(e(-b)f, g)$ nach Lemma 4.1:

$$\int_{\mathbb{R}_-} (\mu_n - \mu)(du)\, \Phi(e(-b)f, g)(t,u) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{4.27}$$

Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Funktion $\Phi(e(-b)f, g)$ in der ersten Variablen nach Lemma 4.1.b folgt auch die gleichmäßige Konvergenz in (4.27) für $t \in [0, T]$. □

Satz 4.3
Es seien $\mathcal{B}$ ein Phasenraum und $L_n, L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ Integraloperatoren, die gemäß (4.25) auf ganz $\mathcal{B}$ mit den Maßen ν_n, $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ dargestellt werden. Für ein $b \in \mathbb{R}$ seien die Maße $e(b)\, d\nu_n$ und $e(b)\, d\nu$ endlich und es gelte:

$$e(b)\, d\nu_n \xrightarrow{w} e(b)\, d\nu \quad \text{für } n \to \infty. \tag{4.28}$$

Für Anfangsbedingungen $\varphi^n, \varphi \in \mathcal{B}$, die für $n \in \mathbb{N}$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} & e(-b)\varphi^n, e(-b)\varphi \in L^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d); \\ & \lim_{n\to\infty} |\varphi^n(0) - \varphi(0)| = 0; \\ & \lim_{n\to\infty} \|e(-b)(\varphi^n - \varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}_-)} = 0, \end{aligned} \tag{4.29}$$

erfüllen, folgt für die Lösungen $x^n(\cdot, \varphi^n, h)$ und $x(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichungen (1.1) und (1.2):

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n(\cdot, \varphi^n, h) - x(\cdot, \varphi, h)\|_{C[0,T]} = 0 \quad \text{für } T \geqslant 0.$$

Beweis: Wie im Beweis zu Satz 3.2 ist die Konvergenz gegen 0 der Terme in (3.17) für $n \to \infty$ zu zeigen.
Aus der schwachen Konvergenz der Maße $e(b)\, d\nu_n$ gegen $e(b)\, d\nu$ folgt die vage Konvergenz der Maße ν_n gegen ν für $n \to \infty$. Satz 2.5 impliziert die Konvergenzen der Differential-Resolventen r_n und r der Maße ν_n und ν sowie ihrer Ableitungen gemäß Satz 2.4.
Lemma 4.2 garantiert die Konvergenz des zweiten Integraltermes in (3.17). Mit der Notation des Beweises zu Lemma 4.2 folgt für den ersten Integralterm in (3.17) für $T \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} & \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (r_n(t-s) - r(t-s)) L_n(S(s)\varphi^n)\, ds \right| \\ & \quad \leqslant \|r_n - r\|_{C[0,T]} \int_0^T e^{bs} \int_{\mathbb{R}_-} |g^n(s+u)|\, |\mu_n|(du)\, ds \\ & \quad \leqslant e^{bT\vee 0}\, \|r_n - r\|_{C[0,T]}\, \|\mu_n\|_{TV}\, \|g^n\|_{L^1(-\infty,T]} \\ & \quad \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Die Konvergenzen der verbleibenden Terme in (3.17) folgen wie im Beweis zu Satz 3.2.
□

Man kann zahlreiche Beispiele betrachten, in denen die Voraussetzungen (3.20) und (3.21) des Korollars 3.4 die Voraussetzung (4.28) des Satzes 4.3 implizieren und umgekehrt. Für einen Vergleich dieser beiden Resultate beschränken wir uns auf die in

Beispiel 3.5 demonstrierte Notwendigkeit, nur Anfangsbedingungen von einer gewissen "Regularität" zu betrachten. Es zeigt sich in den beiden folgenden Beispielen, dass die in Korollar 3.4 geforderte Regularitätsbedingung, nur Anfangsbedingungen im Abschluss $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ zu betrachten, in Satz 4.3 der geforderten Integraldarstellung der betrachteten Operatoren und der Integrierbarkeitseigenschaft (4.29) entspricht.

Beispiel 4.4 Nach Satz 3.4.3 in [HMN91] existiert für einen beliebigen linearen Operator $L \in \mathcal{L}(C_\gamma, \mathbb{K})$ auf dem Phasenraum $C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{K})$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ eine Konstante $D \in \mathbb{K}$ und ein Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K})$ mit $\mathrm{Var}(\nu, [u, 0]) \leqslant a \exp(\gamma u))$, $a > 0$, für $u \leqslant 0$, so dass für $\varphi \in C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{K})$ gilt:

$$L\varphi = D\varphi(-\infty) + \lim_{s\to\infty} \int_{-s}^{0} \nu(du)\, \varphi(u) \quad \text{mit } \varphi(-\infty) := \lim_{u\to-\infty} e^{\gamma u}\varphi(u).$$

Operatoren L, $L_n \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K})$ mit $\mathcal{B} = C_\gamma$ besitzen auf der Menge $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ der zugelassenen Anfangsbedingungen in Korollar 3.4 gerade eine Integraldarstellung und man befindet sich in der Situation, die in Satz 4.3 betrachtet wird.

Beispiel 4.5 (Fortsetzung von 3.5) Für die Maße ν_n und ν gilt für $b > 0$ die schwache Konvergenz von $e(b)\, d\nu_n$ gegen $e(b)\, d\nu$. Für die Funktion $\psi^0 = 1$, für die keine Konvergenz in Beispiel 3.5 vorliegt, gilt jedoch $e(-b)\psi^0 \notin L^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ für jedes $b > 0$. Deshalb ist Satz 4.3 wie auch Korollar 3.4 nicht auf die Funktion ψ^0 anwendbar.

Endliches Gedächtnis 4.6 In den Gleichungen (1.1) und (1.2) werden für $\alpha \geqslant 0$ die Operatoren

$$L_n\varphi = \int_{[-\alpha,0]} \nu_n(du)\, \varphi(u) \quad \text{und} \quad L\varphi = \int_{[-\alpha,0]} \nu(du)\, \varphi(u)$$

mit endlichen Maßen $\nu_n, \nu \in M([-\alpha, 0], \mathbb{K}^{d\times d})$ betrachtet. Wie in Beispiel 2.3.2 diskutiert, ist ein geeigneter Phasenraum für diese Operatoren der Raum $(C([-\alpha, 0] \times L_g^1)(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ mit $g = 0$. In dieser Situation sind die Voraussetzungen des Korollars 3.4 für beliebige Anfangsfunktionen in $C[-\alpha, 0]$ genau dann erfüllt, falls die Maße ν_n schwach gegen ν konvergieren und die Anfangsbedingungen in $C[-\alpha, 0]$ konvergieren. Für von n unabhängige Anfangsbedingungen ist dieses Ergebnis in Lemma 2.3.7 in [Put01] festgehalten.

5 Anwendungen

Die Konvergenzresultate des vorangegangenen Abschnittes ermöglichen die Approximation der Lösung einer affinen funktionalen Differentialgleichung mit unendlichem Gedächtnis durch Lösungen von Differentialgleichungen mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit. In Kapitel 5 werden im skalaren Fall $d = 1$ diese Gleichungen zurückgeführt auf mehrdimensionale gewöhnliche Gleichungssysteme, deren numerische

Approximationen der Lösungen nur auf der Näherung der Eigenwerte der korrespondierenden Matrix basieren.

Satz 5.1
Es sei $\mathcal{B}$ ein Phasenraum und $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ besitze auf $\mathcal{B}$ eine Integraldarstellung gemäß (4.25) mit einem Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$. Es bezeichne $x = x(\cdot, \varphi, h)$ die Lösung der Gleichung (1.2) für $\varphi \in \mathcal{B}$. Ist für ein $b \in \mathbb{R}$ das Maß $e(b)\, d\nu$ endlich und gilt $e(-b)\varphi \in L^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$, so existiert eine Folge $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Maßen der Form (2.11), so dass eindeutige Lösungen x^n der Gleichungen

$$x^n(t) = \varphi(0) + \int_0^t \left(\int_{(-\infty,0]} \nu_n(du)\, x^n(s+u) \right) ds + h(t), \quad t \geqslant 0, \quad x_0^n = \varphi \qquad (5.30)$$

existieren und folgende Konvergenzaussage erfüllen:

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_{C[0,T]} = 0 \quad \textit{für } T \geqslant 0.$$

Für ein endliches Maß ν sind die Maße ν_n endlich.

Beweis: Nach Korollar 2.8 existieren endliche Maße $\widetilde{\nu}_n$ der Form (2.11), die schwach gegen das Maß $e(b)\, d\nu$ für $n \to \infty$ konvergieren. Definiert man für $n \in \mathbb{N}$ die Maße $\nu_n(du) := e(-b)\, d\widetilde{\nu}_n$, so konvergieren die Maße $e(b)\, d\nu_n$ schwach gegen das Maß $e(b)\, d\nu$ für $n \to \infty$. Für die Anwendung des Satzes 4.3 verbleibt der Nachweis der Wohldefiniertheit der Operatoren L und

$$L_n\psi := \int_{(-\infty,0]} \nu_n(du)\, \psi(u), \quad n \in \mathbb{N},$$

auf einem gemeinsamen Phasenraum.
Der Raum $\mathcal{C} := \mathcal{B} \cap (\mathbb{K}^d \times L^1_g)$ mit $g(u) = e^{-bu}$ für $u \leqslant 0$ mit der Semi-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{C}} = \|\cdot\|_{\mathcal{B}} + \|\cdot\|_{\mathbb{K}^d \times L^1_g}$ lässt sich als einen vollständigen Phasenraum nachweisen. Es gilt $L \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{K}^d)$ und $\varphi \in \mathcal{C}$. Da die Maße $\widetilde{\nu}_n$ endlich sind und Dichten der Form von Quasi-Polynomen besitzen, existieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ Konstanten $C_n > 0$, so dass für $\psi \in \mathcal{C}$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}_-} |\psi(u)|\, |\nu_n|(du) = \int_{\mathbb{R}_-} \left|\psi(u)e^{-bu}\right|\, |\widetilde{\nu}_n|(du) \leqslant C_n \int_{\mathbb{R}_-} |\psi(u)|\, e^{-bu}\, du < C_n \|\psi\|_{\mathcal{C}}\,.$$

Aus der Stetigkeit der Operatoren L_n auf $\mathcal{C}$ folgt mit Satz 4.3 die Behauptung. □

Bemerkung 5.2 Satz 5.1 basiert auf dem Konvergenzresultat 4.3, in dem Integraloperatoren vorausgesetzt werden. Auf den meisten Phasenräumen kann zur Gewinnung dieses Resultates das allgemeinere Ergebnis des Korollars 3.4 angewandt werden. Jedoch ist für nur abstrakt beschriebene Phasenräume nicht offensichtlich, auf welchem gemeinsamen Phasenraum sowohl die zu approximierenden Gleichungen als auch die Gleichungen (5.30) definiert sind.

Endliches Gedächtnis 5.3 Für affine Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis sind für jede Anfangsfunktion $\varphi \in C([-\alpha, 0], \mathbb{K}^d)$ die Bedingungen des Satzes 5.1 erfüllt.

Bemerkung 5.4 In der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis kommt der Untersuchung einer möglichen Reihendarstellung der Lösung große Bedeutung zu. Schließt man durch geeignete Voraussetzungen an das Gewichtsmaß $\nu \in M([-\alpha, 0], \mathbb{K}^{d\times d})$ die Existenz von "kleinen" Lösungen aus, so gilt nach Korollar 5.6.4 in [DGVLW95] für die Lösung $x(\cdot, \varphi)$ der homogenen Gleichung (2.3.9) mit endlichem Gedächtnis

$$x(t, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) e^{\lambda_j t} \quad \text{für } t > 0.$$

Hierbei bezeichnen p_j Polynome eines bestimmten Grades sowie λ_j die Nullstellen der charakteristischen Funktion $\det[\Delta_\nu(\cdot)]$. Diese Nullstellen entsprechen gerade dem Spektrum des infinitesimalen Erzeugers der Lösungshalbgruppe der Gleichung (2.3.9) mit endlichem Gedächtnis, der nach Satz 7.4.2 in [HVL93] nur ein Punktspektrum besitzt.
In Beispiel 5.2.5 wird demonstriert, dass bei funktionalen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis das Punktspektrum des Erzeugers keineswegs die Lösungen beschreibt. Es ist also nicht mit einem Ergebnis der Darstellung wie oben für den Fall eines endlichen Gedächtnisses zu rechnen. Jedoch ist die Lösung einer Differentialgleichung mit quasi-polynomiell gewichteter Vergangenheit nach Satz 5.2.3 wieder von der Form eines Quasi-Polynoms, das auf der positiven Achse definiert ist. Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.1 folgt für die Lösung $x(\cdot, \varphi)$ einer homogenen Gleichung (2.1.1) mit unendlichem Gedächtnis:

$$x(t, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m_n} p_j^n(t) e^{\lambda_j^n t} \quad \text{für } t \geqslant 0, \quad m_n \in \mathbb{N},$$

wobei p_j^n Polynome sowie λ_j^n Nullstellen von $\det[D_n]$ sind und $D_n \in M_{k_n}(\mathbb{K}^d)$ für $k_n \in \mathbb{N}$ die zu der Dichte des Maßes ν_n korrespondierende Matrix gemäß (5.2.10) bezeichnet.

Im folgenden Beispiel wird Satz 5.1 angewandt, um die Lösung einer homogenen Differentialgleichung mit endlichem Gedächtnis durch Lösungen von quasi-polynomiell gewichteten Gleichungen zu approximieren.

Beispiel 5.5 Es wird folgende Gleichung für a, $b \in \mathbb{R}$ betrachtet:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bx(t-1) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x(u) &= \varphi(u), \quad u \in [-1, 0], \end{aligned} \tag{5.31}$$

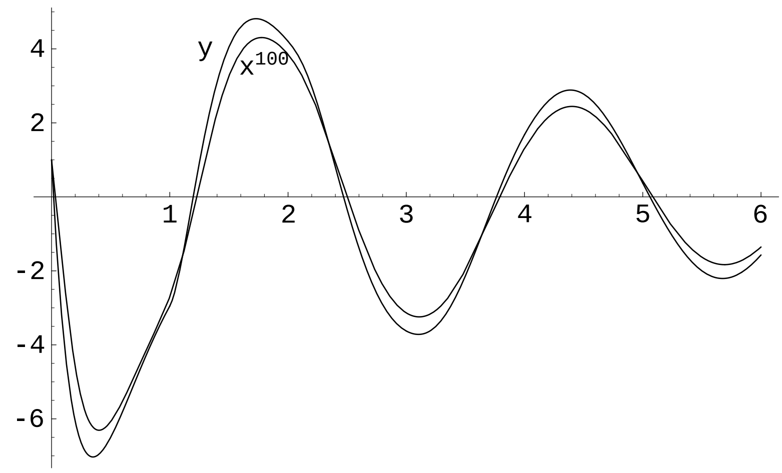

Abbildung 7.1: $a = -3$, $b = -3$, $\varphi(u) = \exp(-3u)$, $n = 100$

wobei φ eine beliebige, stetige Funktion auf dem Intervall $[-1, 0]$ ist. Nach Satz 2.8.a wird für die Approximation der Punktmaße für $n \in \mathbb{N}$ benutzt:

$$\nu_n^1(du) := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u) n a e^{nu}\, du \xrightarrow{w} a\,\delta_0(du) \quad \text{für } n \to \infty,$$
$$\nu_n^2(du) := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u) \tfrac{b}{n!}\,(n+1)^{n+1}\,(-u)^n e^{(n+1)u}\, du \xrightarrow{w} b\,\delta_{-1}(du) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Als approximierende Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis ergeben sich:

$$\begin{aligned} \dot{x}^n(t) &= \int_{(-\infty,0]} x^n(t+s)\,(\nu_n^1 + \nu_n^2)(ds) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x^n(u) &= \mathbb{1}_{[-1,0]}(u)\varphi(u) \quad \text{für } u \leqslant 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Die Gleichungen (5.32) werden auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme gemäß Kapitel 5 reduziert, deren Lösungen – und damit nach Satz 5.2.3 die Lösungen x^n von (5.32) – sich numerisch einfach bestimmen lassen.
Zum Vergleich der Approximation wird die Lösung x der Gleichung (5.31) durch sequentielles Lösen auf den Intervallen $[n, n+1]$ für $n \in \mathbb{N}$, der so genannten Schrittmethode, explizit bestimmt.
Die Graphiken 7.1 und 7.2 zeigen Beispiele der Lösungen x^n der Gleichungen (5.31) für verschiedene Werte von n. Die explizite Lösung der Gleichung (5.32) ist durch y bezeichnet.

Computergestützte Behandlung von Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis erfordern die Vernachlässigung der zeitverzögerten Abhängigkeit ab einem gewissen Wert. Dieses “Abschneiden” des Gedächtnisses wird als eine weitere Anwendung der Konvergenzresultate vorgestellt.

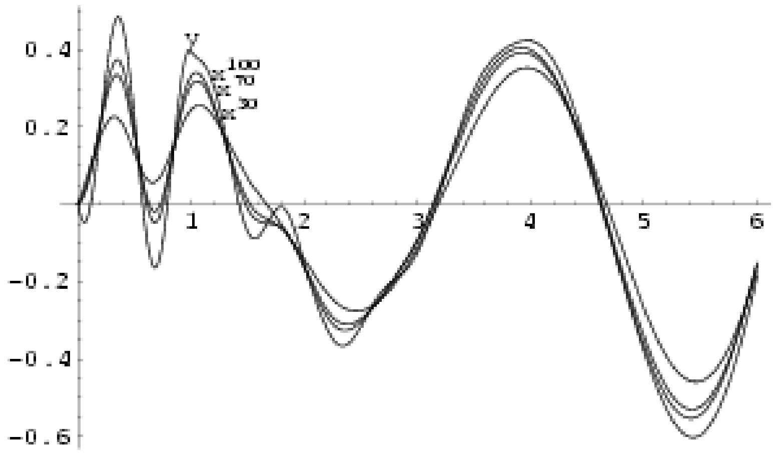

Abbildung 7.2: $a = -1,\ b = -3,\ \varphi(u) = \sin(10u),\ n = 30,\ 70,\ 100$

Zur Vereinfachung wird von einer Gleichung der Form (1.2) mit einem Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$ mit

$$L\varphi = \int_{(-\infty,0]} \nu(du)\,\varphi(u) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{B} \tag{5.33}$$

und einem Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$ ausgegangen. Unter "Abschneiden" der Gedächtnislänge wird intuitiv die Beschränkung der Integrationsgrenze auf ein kompaktes Intervall $[-n, 0]$ verstanden, das in der folgenden Forderung resultiert:

$$L_n \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d) \quad \text{mit} \quad L_n\varphi := \int_{[-n,0]} \nu(du)\,\varphi(u) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{B} \quad \text{und } n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.34}$$

Satz 5.6
Es seien $\mathcal{B}$ ein vollständiger Phasenraum und $x = x(\cdot, \varphi, h)$ eine Lösung der Gleichung (1.2) zu einer Anfangsbedingung $\varphi \in \mathcal{B}$. Falls die Bedingung (5.34) erfüllt ist, so existieren eindeutige Lösungen $x^n = x^n(\cdot, \varphi, h)$ der Gleichungen mit endlichem Gedächtnis:

$$\begin{aligned} x^n(t) &= \varphi(0) + \int_0^t \left(\int_{[-n,0]} \nu(du)\, x^n(s+u) \right) ds + h(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x_0^n &= \varphi \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$, die folgende Konvergenzaussage erfüllen:

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_{C[0,T]} = 0 \quad \text{für } T \geqslant 0.$$

Beweis: Folgt aus Satz 3.2, angewandt auf die Operatoren L_n in (5.34). □

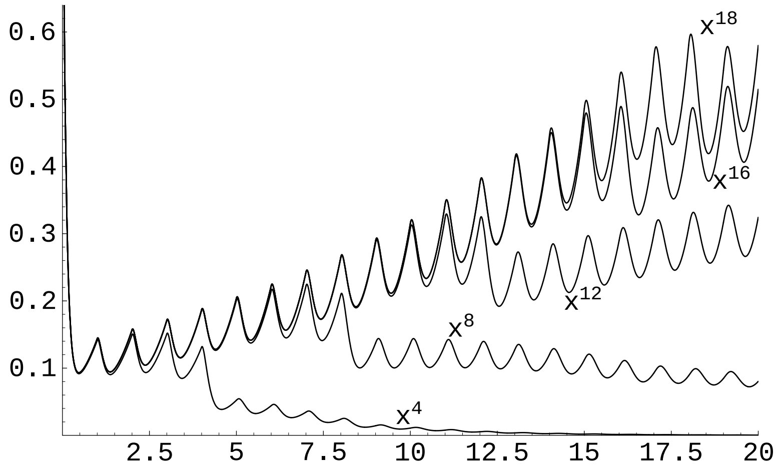

Abbildung 7.3: $a = -10$, $\varphi(u) = \exp(u)$, $n = 4, 8, 12, 16, 18$

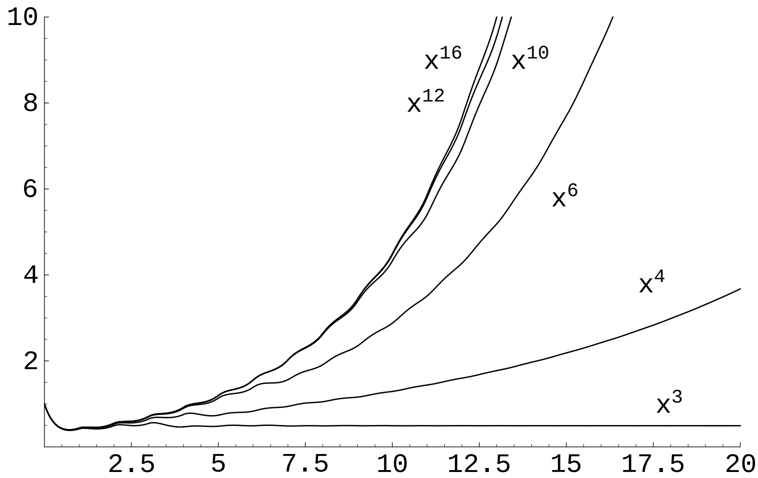

Abbildung 7.4: $a = -3$, $\varphi(u) = \exp(u)$, $n = 3, 4, 6, 10, 12, 16$

Beispiel 5.7 Für $a \in \mathbb{R}$ wird zu dem Maß $\nu(du) := a\,\delta_0(du) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-k}(du)$ die funktionale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \int_{(-\infty,0]} x(t+s)\,\nu(ds), \quad t \geqslant 0, \quad x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{5.35}$$

betrachtet. Als Phasenraum $\mathcal{B}$ wird der Raum $C_\gamma(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ für $\gamma > 0$ gewählt. Wird die Gedächtnislänge ab einem $n \in \mathbb{N}$ vernachlässigt, erhält man mit dem Maß

$$\nu_n(du) := a\,\delta_0(du) + \sum_{k=1}^{n} \delta_{-k}(du)$$

Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis:

$$\begin{aligned} \dot{x}^n(t) &= \int_{[-n,0]} x(t+s)\,\nu_n(ds) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ x(u) &= \mathbb{1}_{[-n,0]}(u)\varphi(u), \quad u \leqslant 0. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Die Voraussetzungen des Satzes 5.6 sind erfüllt und es folgt für die Lösungen $x = x(\cdot,\varphi)$ und $x^n = x^n(\cdot,\varphi)$ der Gleichungen (5.35) und (5.36) für $\varphi \in C_\gamma(\mathbb{R}_-,\mathbb{R})$ die Konvergenz $\|x^n - x\|_{C[0,T]} \to 0$ für $n \to \infty$ und $T \geqslant 0$. In den Abbildungen 7.3 und 7.4 sind die Lösungen x^n der Gleichungen (5.36) für verschiedene $n \in \mathbb{N}$ zu den angegebenen Parametern und Anfangsbedingungen φ dargestellt. Berechnet werden die Lösungen mit der Schrittmethode.

Die Abbildungen 7.3 und 7.4 zeigen, dass die Konvergenz nur lokal gleichmäßig stattfindet. Beide zeigen die Gefahr des zu frühen "Abschneidens" der Vergangenheit: in Abbildung 7.4 ist für $n = 3$ eine stabile Lösung zu erwarten, während für $n = 4$ dies nicht mehr der Fall ist.

6 Parameterabhängige stochastische Gleichungen

6.1 Nicht-lineare Gleichungen

Zunächst wird für die in Kapitel 4 eingeführten allgemeinen stochastischen Differentialgleichungen ein Konvergenzresultat vorgestellt. Der für die Behandlung stochastischer Gleichungen eingeführte Rahmen wird in diesem Abschnitt stets vorausgesetzt.

Für einen Phasenraum $\mathcal{B}$ werden für $n \in \mathbb{N}$ folgende Gleichungen betrachtet:

$$dX^n(t) = F_n(t, X^n_t)\,dt + G_n(t, X^n_t)\,dW(t), \quad t \geqslant 0, \quad X^n_0 = \Phi^n, \tag{6.37}$$

$$dX(t) = F(t, X_t)\,dt + G(t, X_t)\,dW(t), \quad t \geqslant 0, \quad X_0 = \Phi\,. \tag{6.38}$$

Die Anfangsbedingungen Φ^n und Φ sind $\mathcal{B}$-wertige Zufallsvariablen sowie die Funktionale sind für $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt als:

$$\begin{aligned} F, F_n &: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^d \quad \text{messbar}, \\ G, G_n &: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^{d\times d'} \quad \text{messbar}. \end{aligned}$$

Satz 4.1.5 garantiert unter Lipschitz– und linearer Wachstumsbedingung an die Funktionale die eindeutige Existenz von Lösungen der Gleichungen (6.37). Für die Konvergenzaussage des folgenden Satzes werden diese Bedingungen gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}$ gefordert:

Für jedes $T \geqslant 0$ existiert eine Konstante K_T, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$|F_n(t,\varphi) - F_n(t,\psi)|^2 + |G_n(t,\varphi) - G_n(t,\psi)|^2 \leqslant K_T \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}}^2, \tag{6.39}$$
$$|F_n(t,\varphi)|^2 + |G_n(t,\varphi)|^2 \leqslant K_T(1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}^2), \tag{6.40}$$
$$|F(t,\varphi) - F(t,\psi)|^2 + |G(t,\varphi) - G(t,\psi)|^2 \leqslant K_T \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}}^2, \tag{6.41}$$
$$|F(t,\varphi)|^2 + |G(t,\varphi)|^2 \leqslant K_T(1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}^2), \tag{6.42}$$

für $t \in [0,T]$, $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$.

Satz 6.1
Für die Funktionale F_n, G_n und F, G gelten sowohl die Bedingungen (6.39) bis (6.42) als auch die folgende Konvergenz für jede für $\mathcal{B}$ zulässige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |F_n(s,x_s) - F(s,x_s)|^2 \, ds = 0 \quad \text{für jedes } T \geqslant 0, \tag{6.43}$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |G_n(s,x_s) - G(s,x_s)|^2 \, ds = 0 \quad \text{für jedes } T \geqslant 0. \tag{6.44}$$

Erfüllen die Anfangsbedingungen Φ^n und Φ mit $\mathbb{E}\,\|\Phi^n\|_{\mathcal{B}}^2 < \infty$ und $\mathbb{E}\,\|\Phi\|_{\mathcal{B}}^2 < \infty$ die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\|\Phi^n - \Phi\|_{\mathcal{B}}^2 = 0,$$

so folgt für die Lösungen $X^n(\cdot,\Phi^n)$ und $X(\cdot,\Phi)$ der Gleichungen (6.37) und (6.38):

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X^n(t,\Phi^n) - X(t,\Phi)|^2\right] = 0 \quad \text{für jedes } T \geqslant 0.$$

Beweis: Mit einer Nulladdition und der im Beweis zu dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz 4.1.5 benutzten Methode, basierend auf der Doobschen L^2-Ungleichung und den Lipschitzbedingungen (6.39), erhält man mit $X^n = X^n(\cdot,\Phi^n)$ und $X = X(\cdot,\Phi)$ für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left(\sup_{s\in[0,t]} |X^n(s,\Phi^n) - X(s,\Phi)|^2\right)\\ &\leqslant 2\,\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,t]} |Y^n(s)|^2\right) + 4K_T(T+4)\int_0^t \mathbb{E}\,\|X_u^n - X_u\|_{\mathcal{B}}^2 \, du,\end{aligned} \tag{6.45}$$

wobei für $s \in [0,T]$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert ist:

$$\begin{aligned}Y^n(s) := \Phi^n(0) - \Phi(0) &+ \int_0^s (F_n(u,X_u) - F(u,X_u))\, du\\ &+ \int_0^s (G_n(u,X_u) - G(u,X_u))\, dW(u).\end{aligned}$$

Bedingung A.c an den Phasenraum $\mathcal{B}$ impliziert für $t \in [0,T]$:

$$\int_0^t \mathbb{E}\,\|X_u^n - X_u\|_{\mathcal{B}}^2\,du$$
$$\leqslant 2T\,\|N\|_{B[0,T]}^2\,\mathbb{E}\,\|\Phi^n - \Phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 2\,\|M\|_{C[0,T]}^2 \int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{\xi\in[0,u]} |X^n(\xi) - X(\xi)|^2\right) du.$$

Nach Einsetzen dieser Abschätzung in (6.45) folgt aus dem Lemma von Gronwall (Problem 5.2.7 in [KS91]) für $T \geqslant 0$:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,T]} |X^n(s,\Phi^n) - X(s,\Phi)|^2\right)$$
$$\leqslant C_T\,\mathbb{E}\,\|\Phi^n - \Phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 2\,\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,T]} |Y^n(s)|^2\right) + D_T \int_0^T e^{D_T(T-s)}\,\mathbb{E}\left(\sup_{\xi\in[0,s]} |Y^n(\xi)|^2\right) ds$$

mit Konstanten C_T, $D_T > 0$, die von den Funktionen M und N abhängen. Es verbleibt der Nachweis von

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |Y^n(t)|^2\right) = 0. \tag{6.46}$$

Aus einer weiteren Anwendung der Doobschen L^2-Ungleichung folgt

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |Y^n(t)|^2\right)$$
$$\leqslant 3\Bigg(H\,\mathbb{E}\,\|\Phi^n - \Phi\|_{\mathcal{B}}^2 + T\,\mathbb{E}\left(\int_0^T |F_n(s,X_s) - F(s,X_s)|^2\,ds\right)$$
$$+ 4\,\mathbb{E}\left(\int_0^T |G_n(s,X_s) - G(s,X_s)|^2\,ds\right)\Bigg). \tag{6.47}$$

Wegen Bedingung (6.40) gilt nach Satz 4.1.4 für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |F_n(s,X_s)|^2\,ds\right) \leqslant K_T \int_0^T (1 + \mathbb{E}\,\|X_s\|_{\mathcal{B}}^2)\,ds < \infty$$

und analog für G_n. Wegen den Voraussetzungen (6.43) und (6.44) impliziert der Satz von Lebesgue, angewandt auf (6.47), die Konvergenz in (6.46). □

Die Bedingungen (6.43) und (6.44) in Satz 6.1 können ersetzt werden durch die Forderung, dass für jedes $T \geqslant 0$ und $s \in [0,T]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|_{\mathcal{B}}<N} |F_n(s,x) - F(s,x)|^2 = 0 \quad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}, \tag{6.48}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|_{\mathcal{B}}<N} |G_n(s,x) - G(s,x)|^2 = 0 \quad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}\,. \tag{6.49}$$

Der Beweis von Satz 6.1 unter diesen Voraussetzungen erfolgt analog.
Das Resultat des Satzes 6.1 für stochastische Differentialgleichungen ohne Gedächtnis findet man in Satz 1.7.2 in [GS71]. Die dort geforderte Konvergenz an die Drift- und Diffusionsterme sind analog zu den Bedingungen (6.48) und (6.49) formuliert.

6.2 Affine Gleichungen

Für die bisher betrachteten affinen stochastischen Differentialgleichungen sind die Gleichungen (6.37) und (6.38) von der Form:

$$dX^n(t) = L_n(X_t^n)\,dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \quad X_0^n = \Phi^n, \tag{6.50}$$

$$dX(t) = L(X_t)\,dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \quad X_0 = \Phi, \tag{6.51}$$

mit Operatoren L_n, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{B}$-wertigen Zufallsvariablen Φ^n und Φ.
Durch Kombination des Korollars 3.4 für deterministische Gleichungen und des Satzes 6.1 für nicht-lineare stochastische Gleichungen erhält man folgendes Resultat:

Satz 6.2
Es seien $\mathcal{B}$ ein vollständiger Phasenraum und $L_n, L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^d)$ Operatoren, die auf $C_c(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^d)$ mit den Maßen ν_n, $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^{d\times d})$ gemäß (2.5) dargestellt werden. Desweiteren gelte:

$$\sup\{|L_n\psi| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \quad \text{für } \psi \in \overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d); \tag{6.52}$$

$$\nu_n \xrightarrow{v} v \quad \text{für } n \to \infty. \tag{6.53}$$

Die Anfangsbedingungen Φ^n und Φ seien $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$-wertige Zufallsvariablen mit:

$$\mathbb{E}\,\|\Phi^n\|_{\mathcal{B}}^2 < \infty \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } \quad E\,\|\Phi\|_{\mathcal{B}}^2 < \infty, \tag{6.54}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi^n - \Phi\|_{\mathcal{B}} = 0 \quad P\text{-f.s. und in } L_P^2(\Omega, \mathbb{R}).$$

Dann folgt für die Lösungen $X^n(\cdot, \Phi^n)$ und $X(\cdot, \Phi)$ der Gleichungen (6.50) und (6.51) für jedes $T \geqslant 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \|X^n(\cdot, \Phi^n) - X(\cdot, \Phi)\|_{C[0,T]} = 0 \quad P\text{-f.s. und in } L_P^2(\Omega, \mathbb{R}).$$

Beweis: Die pfadweise Konvergenz folgt aus Korollar 3.4.
Für die Konvergenz in $L_P^2(\Omega, \mathbb{R})$ werden die Voraussetzungen des Satzes 6.1 auf dem Phasenraum $\overline{C}_c^{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^d)$ nachgewiesen. Der Satz von Banach-Steinhaus (Satz 2.5 in [Rud73]) gewährleistet das Erfüllen der Ungleichungen (6.39) und (6.40) für die Operatoren L_n. Wie im Beweis zu Korollar 3.4 wird die Voraussetzung (3.12) des Lemmas 3.1 verifiziert. Die Aussage des Lemmas 3.1 garantiert die Konvergenz (6.43) und aus Satz 6.1 folgt die Behauptung. □

Endliches Gedächtnis 6.3 Für affine stochastische Differentialgleichungen mit endlichem Gedächtnis und stetigen Anfangsbedingungen impliziert die Bedingung (6.53) die Bedingung (6.52) und ist unseres Wissens in dieser Allgemeinheit noch nicht formuliert worden, vergleiche Satz 2.3.8 in [Put01].

In analoger Weise wie Satz 6.2 lässt sich auch Satz 3.2 auf die stochastischen Differentialgleichungen (6.50) und (6.51) übertragen.
Die Resultate dieses Abschnittes, die für die deterministischen Differentialgleichungen (1.1) und (1.2) erzielt worden sind, gelten pfadweise für die affinen stochastischen Differentialgleichungen (6.50) und (6.51). Explizit wird Satz 5.1, die Approximation einer Lösung einer Differentialgleichung durch die Lösungen von quasi-polynomiell gewichteten Gleichungen, für stochastische Gleichungen im folgenden Beispiel formuliert. Die Notationen des Kapitels 5 werden benutzt.

Beispiel 6.4 Für einen Phasenraum $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ wird die Gleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\int_{(-\infty,0]} X(t+u)\,\nu(du) \right) dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0, \\ X_0 &= \Phi, \end{aligned} \tag{6.55}$$

mit einer $\mathcal{B}$-wertigen Zufallsvariablen Φ und einem Maß $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ betrachtet. Der Operator

$$L\varphi := \int_{(-\infty,0]} \varphi(u)\,\nu(du)$$

wird als linear und beschränkt auf $\mathcal{B}$ vorausgesetzt. Es sei $e(b)\,d\nu$ für ein $b \in \mathbb{R}$ ein endliches Maß und es gelte

$$P\left(\int_{-\infty}^{0} |\Phi(u)|\, e^{-bu}\, du < \infty \right) = 1.$$

Dann existieren nach Satz 5.2.3 und Satz 5.1 mehrdimensionale Ornstein-Uhlenbeck Prozesse $\boldsymbol{Y}^n = (Y_0^n, \ldots, Y_{N_n}^n)^T$, so dass für deren erste Komponente $X^n := Y_0^n$ und der Lösung $X = X(\cdot, \Phi)$ der Gleichung (6.55) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|X^n - X\|_{C[0,T]} = 0 \quad \text{für } T \geqslant 0 \text{ P-f.s.}$$

Die Prozesse X^n sind Lösungen der in Kapitel 5 behandelten affinen stochastischen Differentialgleichungen, deren Vergangenheiten durch Maße ν_n der Form (2.11) gewichtet werden. Die (N_n+1)-dimensionalen Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse $\boldsymbol{Y}^n$ besitzen für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgende Form:

$$\boldsymbol{Y}^n(t) = e^{D_n t} \left(Y^n(0) + \int_0^t e^{-D_n s} E\, dW(s) \right) \quad \text{für } t \geqslant 0.$$

Es ist $E = (1, 0, \ldots, 0)^T$ und durch die in (5.2.8) definierte Funktion τ ist $Y(0)$ durch $Y(0) = \tau(\Phi)$ definiert. Die Matrizen D_n sind durch die Maße ν_n der Form (2.11) bestimmt und besitzen deshalb gemäß (5.2.10) für $n \in \mathbb{N}$ folgende Gestalt:

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & C_{1,n} & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ a_{1,n} & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & C_{m_n,n} & \\ a_{m_n,n} & & & & & & & \end{pmatrix} \in M_{N_n+1}(\mathbb{R}),$$

$$C_{i,n} = \begin{pmatrix} -\gamma_{i,n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma_{i,n} & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & & & -\gamma_{i,n} \end{pmatrix} \in M_{n_{i,n}+1}(\mathbb{R}) \quad \text{für } i = 1, \dots, m_n,$$

für $\gamma_{1,n}, \dots, \gamma_{m_n,n} \in \mathbb{R}$, $a_{1,n}, \dots, a_{m_n,n} \in \mathbb{R}$ und $N_n = n_{1,n} + \dots n_{m_n,n} + m_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Kapitel 8

Ausblick

Der Zugang des axiomatisch beschriebenen Phasenraumes erweist sich in dieser Arbeit als ein tragfähiges Konzept auch zur Behandlung von stochastischen Differentialgleichungen mit Gedächtnis. Für nicht-lineare stochastische Differentialgleichungen sind grundlegende Resultate zur Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und über die Parameterabhängigkeit erzielt worden. Es ist demonstriert worden, wie sich die Bedingungen an einen Phasenraum in die gängige Argumentation bei der Behandlung von stochastischen Differentialgleichungen einbinden lassen. Weitere Fragen zur Stabilitätsanalyse, Approximation von Lösungen, allgemeinere Existenzsätze und Ähnliches lassen sich im Rahmen des abstrakten Phasenraumes untersuchen.

Affine Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis besitzen spezielle Eigenschaften, wie die Existenz eines essentiellen Spektrums des assoziierten infinitesimalen Erzeugers oder eine sich nicht exponentiell verhaltende Differential-Resolvente, die bei Gleichungen mit endlichem Gedächtnis nicht auftreten können. Trotzdem können für Lösungen von Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis viele der bekannten Eigenschaften für Gleichungen mit endlichem Gedächtnis in dieser Arbeit nachgewiesen werden, jedoch erfordern diese Eigenarten des unendlichen Gedächtnisses oftmals andere Untersuchungsmethoden.

Weniger Aufmerksamkeit haben wir in dieser Arbeit Eigenarten von Gleichungen mit unendlichem Gedächtnis geschenkt, die in speziellen Situationen auftreten können. So lassen die in Kapitel 3 betrachteten Lyapunov-Exponenten keine detaillierten Aussagen über die Lösungen im (stabilen) Fall von Phasenräumen $\mathcal{B}$ mit $\beta_{\mathcal{B}} = 0$ zu. Anders, etwa polynomiell gewichtete Quotienten (siehe Beispiel 3.2.9) können in diesem Fall ein genaueres Verhalten der Lösung angeben.

Für den Nachweis einer stationären Lösung in Kapitel 4 ist die Existenz des Momentes der Ordnung α des zugrunde liegenden Maßes für $\alpha > \frac{1}{2}$ vorausgesetzt, um durch eine ausreichende Konvergenzrate der Differential-Resolvente die Existenz des hierbei auftretenden Integrals zu gewährleisten. Bei der Definition dieses Integrals durch stochastische Methoden wie in [GK00] (siehe Seite 58) und der Entwicklung eines zu dem Satz von Fubini ähnlichen Resultates für dieses Integral kann die Existenz einer stationären Lösung untersucht werden, auch falls das Maß zwar endlich ist, aber nicht die

Momentenbedingung erfüllt.
Neue Aspekte ergeben sich in der Theorie von stochastischen Evolutionsgleichungen, die meistens durch die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen motiviert ist. Aber auch affine Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis lassen sich zunächst formal als eine unendlich-dimensionale lineare stochastische Evolutionsgleichung auf dem Raum $E := \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}$ schreiben:

$$\begin{aligned} dX(t) &= GX(t)\,dt + dW(t) \quad \text{für } t \geqslant 0 \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Es ist W ein unendlich-dimensionaler Wiener-Prozess auf dem Raum $\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}$ und X_0 eine $\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}$ wertige Zufallsvariable. Der Operator $G : E \subseteq \mathrm{dom}(G) \to E$ ist ein infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe.
Jedoch stellen sich durch diesen Zugang vollkommen neue Fragen in der Theorie von Evolutionsgleichungen. Denn üblicherweise werden Evolutionsgleichungen auf separablen Hilberträumen E betrachtet (siehe [DPZ92]), wodurch erst eine Entwicklung eines geeigneten allgemeinen stochastischen Integralbegriffes ermöglicht wird. Wegen der auftretenden, vereinfacht gesprochen, nicht endlichen Integrationsgrenze bei affinen Differentialgleichungen mit unendlichem Gedächtnis kann aber in (1) kein Hilbertraum E angenommen werden, ohne sich stark einzuschränken. Einen allgemeinen Ansatz zur Behandlung von Evolutionsgleichungen auf separablen Banachräumen wird in der Arbeit [BN00] vorgestellt. Interessant in diesem Zusammenhang ist die Klärung der Frage, welche Bedeutung den vorausgesetzten Eigenschaften von Phasenräumen zukommt.
Ist eine Behandlung der Gleichung (1) realisiert, werden durch Resultate der Halbgruppentheorie, ähnlich wie für den Fall eines Hilbertraumes, Untersuchungsmethoden bereitgestellt, die Aussagen für die zugrunde liegende reellwertige Gleichung erlauben. Insbesondere durch Ergebnisse über die Störung von infinitesimalen Erzeugern (siehe [EN00]) können qualitative Eigenschaften nicht-linearer stochastischer Differentialgleichungen studiert werden. Auch das in Beispiel 4.3.13 beobachtete Phänomen einer Gleichung, in der ein stationärer Prozess als nicht "konventionelle" Lösung existiert, lässt sich durch die verschiedenen Lösungsbegriffe für Evolutionsgleichungen einordnen und in Relation zu analogen Phänomenen, etwa bei partiellen Differentialgleichungen, setzen.

In order to solve this differential equation you look at it till a solution occurs to you.
George Pólya (1887 - 1985)

Anhang A

Semi-normierte Räume

In diesem Abschnitt werden der Stetigkeitsbegriff und andere Eigenschaften von linearen Operatoren in semi-normierten Räumen durch die jeweiligen Begriffe in topologischen linearen Räumen erklärt. Als eine "grobe Faustregel" ergibt sich, dass in den jeweiligen Definitionen für normierte Räume die Norm durch die Semi-Norm ersetzt werden kann.

Bei den folgenden Begriffen wie topologischer linearer Raum, lokal konvexer topologischer Raum und andere beziehen wir uns auf die hierfür eingeführten Definitionen in [Edw65]. Zu beachten ist, dass dort entgegen einer oft benutzten Konvention ein topologischer linearer Raum nicht notwendigerweise Hausdorffsch sein muss.

Es sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$ mit einer Semi-Norm $\|\cdot\|_X$. Definiere für $\varepsilon > 0$ die Mengen

$$U(\varepsilon) := \{x \in X\,;\, \|x\|_X \leqslant \varepsilon\}.$$

Die Mengen $U(\varepsilon)$ sind konvex und induzieren auf X eine eindeutige Topologie derart, dass die Mengen $U(\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ eine Umgebungsbasis der 0 darstellen und X ein lokal konvexer topologischer linearer Raum ist; siehe 1.10.1 in [Edw65]. Diese Topologie auf X wird die *durch die Semi-Norm* $\|\cdot\|_X$ *induzierte Topologie* genannt. Für $y \in X$ und $\varepsilon > 0$ sind die Mengen

$$B(y, \varepsilon) := \{x \in X \,:\, \|x - y\| < \varepsilon\}$$

offen in dieser Topologie, siehe 0.2.21 in [Edw65].

Definition A.1
Für semi-normierte Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ *und* $(Y, \|\cdot\|_Y)$*, die mit den jeweiligen durch die Semi-Normen induzierten Topologien versehen seien, definiere*

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{T : X \to Y \,:\, T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Satz A.2
Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ *und* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *semi-normierte Räume, die mit den jeweiligen durch die Semi-Normen induzierten Topologien versehen seien. Es gilt:*

a) $T \in \mathcal{L}(X, Y) \iff \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < \infty.$

b) $T \in \mathcal{L}(X,Y) \iff T : X \to Y$ *linear und beschränkt.*

c) *Für* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *definiert*

$$\|T\|_{X\to Y} := \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y$$

eine Semi-Norm auf $\mathcal{L}(X,Y)$ *und, falls* $\|\cdot\|_Y$ *eine Norm ist, eine Norm auf* $\mathcal{L}(X,Y)$.

d) *Falls* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *ein Banachraum ist, so ist auch* $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{X\to Y})$ *ein Banachraum.*

Beweis: Siehe 1.10.10 in [Edw65]. □

Für einen semi-normierten Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ sei $N := \{x \in X : \|x\|_X = 0\}$ und $\pi : X \to X/N$ bezeichne die Quotientenabbildung. Dann definiert

$$p(\pi(x)) := \|x\|_X \quad \text{für } x \in X$$

eine Norm auf X/N nach 1.43 in [Rud73] und der Quotientenraum X/N ist ein normierter, linearer Raum.

Definition A.3
Für einen semi-normierten Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ *definiere mit den oben eingeführten Bezeichnungen*

$$\hat{X} := X/\|\cdot\|_X := X/N \quad \text{und} \quad \hat{x} := \pi(x) \quad \text{für } x \in X;$$
$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \|x\|_X \quad \text{für } x \in X.$$

Satz A.4
Für einen semi-normierten Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ *ist* $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ *ein normierter Raum.*

Beweis: Siehe 1.43 in [Rud73]. □

Satz A.5
Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ *und* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *semi-normierte Räume und* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Die Abbildung*

$$\hat{T} : \hat{X} \to \hat{Y}, \quad \hat{T}\hat{x} := (Tx)\hat{}$$

ist wohldefiniert und es gilt $\hat{T} \in \mathcal{L}(\hat{X}, \hat{Y})$ *mit* $\|\hat{T}\|_{\hat{X}\to\hat{Y}} = \|T\|_{X\to Y}$.

Beweis: Für $x_1, x_2 \in X$ mit $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ erhält man

$$\left\|\hat{T}\hat{x}_1 - \hat{T}\hat{x}_2\right\|_{\hat{Y}} = \left\|(T(x_1 - x_2))\hat{}\right\|_{\hat{Y}} = \|T(x_1 - x_2)\|_Y \leqslant \|T\|_{X\to Y} \|x_1 - x_2\|_X = 0,$$

was die Wohldefiniertheit des Operators $\hat{T}$ zeigt. Die Linearität von $\hat{T}$ ergibt sich aus der Linearität der Quotientenabbildungen nach $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ sowie des Operators T. Die Stetigkeit von $\hat{T}$ folgt aus

$$\left\|\hat{T}\hat{x}\right\|_{\hat{Y}} = \left\|(Tx)\hat{}\right\|_{\hat{Y}} = \|Tx\|_Y$$

für $x \in X$. □

Definition A.6
Für einen semi-normierten Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ über $\mathbb{K}$ definiere den Dualraum von X:

$$X^* := \{x^* : X \to \mathbb{K} \text{ linear und stetig}\}$$
$$\|x^*\|_{X^*} := \sup\{x^*(x) : \ x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leqslant 1\}$$

Bemerkung A.7 a) Nach Satz A.2.d ist $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ ein Banachraum.

b) Durch die Abbildung $x^* \mapsto (x^*)\hat{}$ für $x^* \in X^*$ kann $(\hat{X})^*$ mit X^* identifiziert werden. Es werden die Notationen $\hat{x}^* := (x^*)\hat{}$ und $\hat{X}^* := (\hat{X})^*$ verwendet.

c) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|)$ semi-normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so kann wegen b der adjungierte Operator $\hat{T}^* : \hat{Y}^* \to \hat{X}^*$ identifiziert werden mit dem adjungierten Operator

$$T^* : Y^* \to X^* \quad (T^* y^*)x = y^*(Tx)$$

durch die Quotientenabbildungen von X nach $\hat{X}$ und von Y nach $\hat{Y}$ gemäß Definition A.3.

Anhang B

Matrixwertige Maße

Es seien $d, i, j \in \mathbb{N}$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ sowie σ_I die Borel σ-Algebra über I.

Definition B.1

a) *Eine Funktion $\nu : \sigma_I \to \mathbb{K}$ heißt ein $\mathbb{K}$-wertiges (Borel) Maß, falls*

$$\nu(\emptyset) = 0 \quad \textit{und} \quad \nu \ \sigma\textit{-additiv ist.}$$

b) *Eine Funktion $\nu : \sigma_I \to \mathbb{K}^{d\times d}$ heißt ein $\mathbb{K}^{d\times d}$-wertiges Maß, falls*

$$\nu = (\nu_{k,l})_{k,l=1}^{d} \quad \textit{und} \quad \nu_{k,l} : \sigma_I \to \mathbb{K} \quad \textit{ein } \mathbb{K}\textit{-wertiges Maß ist.}$$

c) *Eine Funktion ν heißt ein $\mathbb{K}^{d\times d}$-wertiges, lokales Maß auf I, falls*

$$\nu|_{\sigma(K)} : \sigma_K \to \mathbb{K}^{d\times d} \quad \textit{ein } \mathbb{K}^{d\times d}\textit{-wertiges Maß für jede kompakte Menge } K \subseteq I \textit{ ist,}$$

wobei σ_K die von K erzeugte Borel σ-Algebra bezeichnet.

d) *Ein $\mathbb{R}$-wertiges Maß $\nu : \sigma_I \to \mathbb{R}$ heißt positiv, falls $\nu(S) \geqslant 0$ für alle $S \in \sigma_I$.*

Bemerkung B.2 Lokale Maße auf I werden auch Radon-Maße genannt; siehe S.36 in [Kal02].

Im Folgenden seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und σ_I die Borel σ-Algebra über I.
Wir führen folgende Notationen ein:

$$\begin{aligned}
M(I, \mathbb{K}) &:= \{\nu : \sigma_I \to \mathbb{K} \,:\, \nu \text{ ist } \mathbb{K}\text{-wertiges Maß}\};\\
M(I, \mathbb{K}^{d\times d}) &:= \{\nu : \sigma_I \to \mathbb{K}^{d\times d} \,:\, \nu \text{ ist } \mathbb{K}^{d\times d}\text{-wertiges Maß}\};\\
M_{loc}(I, \mathbb{K}^{d\times d}) &:= \{\nu \,:\, \nu \text{ ist } \mathbb{K}^{d\times d}\text{-wertiges lokales Maß}\};\\
M^{+}(I, \mathbb{R}) &:= \{\nu : \sigma_I \to \mathbb{R} \,:\, \nu \text{ ist } \mathbb{R}\text{-wertiges, positives Maß}\}.
\end{aligned}$$

Definition B.3
Für ein Maß $\nu \in M(I, \mathbb{K}^{d\times d})$ ist die totale Variation auf $D \in \sigma_I$ gegeben durch

$$|\nu|(D) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\nu(D_k)| : \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D \right\},$$

wobei das Supremum über allen disjunkten Zerlegungen $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von D mit $D_k \in \sigma_I$ für $k \in \mathbb{N}$ gebildet wird.

Satz B.4
Für ein Maß $\nu \in M(I, \mathbb{K}^{d\times d})$ ist die Mengenfunktion

$$D \mapsto |\nu|(D) \quad \text{für } D \in \sigma_I$$

ein Maß in $M^+(I, \mathbb{R})$.

Beweis: Siehe Satz 3.5.3 in [GLS90]. □

Für $\nu \in M(I, \mathbb{K}^{d\times d})$ definiert

$$\|\nu\|_{TV} := |\nu|(I)$$

eine Norm auf $M(I, \mathbb{K}^{d\times d})$.
Die üblichen Resultate für skalare Maße $\nu \in M(I, \mathbb{R})$ übertragen sich durch komponentenweise Betrachtungen auf den matrixwertigen Fall von $\nu \in M(I, \mathbb{K}^{d\times d})$, siehe Abschnitt 3.2, 3.4, 3.5 und 3.6 in [GLS90]. Eine Ausnahme bildet die Berechnung der totalen Variation, siehe Beispiel 3.5.5 in [GLS90].
Für ein Maß $\nu \in M_{loc}(I, \mathbb{K}^{d\times d})$ sei $f : I \to \mathbb{K}^{d\times i}$ eine Funktion mit

$$\int_I |f(u)|\, |\nu|(du) < \infty$$

Dann ist das Integral

$$\int_I \nu(du)\, f(u) \in \mathbb{K}^i$$

wohldefiniert, falls $\nu(du)f(u)$ als Matrizenprodukt verstanden wird. Analoges gilt für $f : I \to \mathbb{K}^{i\times d}$ und $\int f(u)\, \nu(du)$. Für $p \geqslant 1$ definiere

$$L^p_\nu(I, \mathbb{K}^{d\times i}) := \{f : I \to \mathbb{K}^{d\times i} \ : \ \int_I |f(u)|^p \ |\nu|(du) < \infty\},$$
$$\|f\|_{L^p_\nu} := \left(\int_I |f(u)|^p \ |\nu|(du)\right)^{1/p}.$$

Falls ν das Lebesgue-Maß auf I ist, so wird auf die Angabe des Maßes verzichtet:

$$L^p(I,\mathbb{K}^{d\times i}) := \{f : I \to \mathbb{K}^{d\times i} \;:\; \int_I |f(u)|^p \; du < \infty\},$$
$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_I |f(u)|^p \; du\right)^{1/p}.$$

Für eine Funktion $f \in L^1_\nu(\mathrm{I},\mathbb{K}^{d\times i})$ und $\nu \in M(I,\mathbb{K}^{d\times d})$ definiert

$$\mu(A) := \int_A \nu(du)\, f(u) \quad \text{mit } A \in \sigma_I \tag{B.1}$$

ein Maß $\mu \in M(I,\mathbb{K}^{d\times i})$. Als Notation wird $\mu = d\nu\, f$ benutzt.

Satz B.5
Für $\nu \in M(I,\mathbb{K}^{d\times d})$ und $f \in L^1_\nu(I,\mathbb{K}^{d\times i})$ gilt:

$$\left|\int_I \nu(ds)\, f(s)\right| \leqslant \int_I |f(s)|\; |\nu|(ds).$$

Beweis: Siehe Satz 3.5.6 in [GLS90]. □

Anhang C

Essentielles Spektrum

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Begriffe und Resultate im Zusammenhang mit dem essentiellen Spektrum eines linearen Operators gegeben, wie sie in [HMN91] zitiert werden und wo weitere Literaturhinweise zu finden sind.

Definition C.1
Es sei $F : dom(F) \subseteq X \to X$ ein dicht definierter, abgeschlossener linearer Operator auf einem komplexen Banachraum X.

a) $\rho(F) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \operatorname{Id} - F \ : \ dom(F) \to X \text{ ist bijektiv } \}$ *heißt Resolventenmenge.*

b) $\sigma(F) := \mathbb{C} \setminus \rho(F)$ *heißt Spektrum.*

c) $\sigma_P(F) := \{\lambda \in \sigma(F) \ : \ \lambda \operatorname{Id} - F \text{ ist nicht injektiv}\}$ *heißt Punktspektrum.*

d) $$\sigma_e(F) := \left\{ \lambda \in \sigma(F) \ : \ \begin{array}{l} \textit{Bild}\,(\lambda \operatorname{Id} - F) \text{ ist nicht abgeschlossen} \\ \text{oder } \lambda \text{ ist Häufungspunkt von } \sigma(F) \\ \text{oder } \cup_{l \geqslant 1} \textit{Kern}\left[(\lambda \operatorname{Id} - F)^l\right] \text{ ist unendlich dimensional} \end{array} \right\}$$
heißt essentielles Spektrum.

In Analogie zu dem Spektralradius

$$r_\sigma(F) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(F)\} \tag{C.1}$$

definiert man den essentiellen Spektralradius des Operators F:

$$r_e(F) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_e(F)\}. \tag{C.2}$$

Definition C.2
Es sei X ein Banachraum.

a) *Für eine beschränkte Menge $A \subseteq X$ heißt*

$$\alpha(A) := \inf\{c > 0 : A \text{ hat endliche Überdeckung eines Durchmessers } < c\}$$

Kuratowski-Maß der Nicht-Kompaktheit von A.

b) *Für einen beschränkten Operator $T \in \mathcal{L}(X, X)$ heißt*

$$\alpha(T) := \inf\{s \geqslant 0 : \alpha(T(A)) \leqslant s\alpha(A) \text{ für alle beschränkten Mengen } A \subseteq X\}$$

Kuratowski-Maß der Nicht-Kompaktheit von T.

Einige Eigenschaften des Kuratowski-Maßes werden wie auf Seite 125 in [HMN91] wiedergegeben. Es seien $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, X)$:

$$0 \leqslant \alpha(T_1) \leqslant \|T_1\|_{X \to X}\,; \tag{C.3}$$
$$\alpha(T_1) = 0 \iff T_1 \text{ ist ein kompakter Operator;} \tag{C.4}$$
$$\alpha(T_1 + T_2) \leqslant \alpha(T_1) + \alpha(T_2); \tag{C.5}$$
$$\alpha(T_1 T_2) \leqslant \alpha(T_1)\alpha(T_2). \tag{C.6}$$

Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(X, X)$ ergibt sich der essentielle Spektralradius zu

$$r_e(T) = \lim_{n\to\infty} \left(\alpha(T^n)\right)^{1/n},$$

wie auf Seite 125 in [HMN91] festgehalten ist.
Die Bedeutung des essentiellen Spektrums liegt im folgenden Korollar zu einem Resultat von Browder in [Bro61].

Korollar C.3
Es sei $F : dom(F) \subseteq X \to X$ ein dicht definierter abgeschlossener linearer Operator auf einem komplexen Banachraum X und $\lambda \in \sigma(F) \setminus \sigma_e(F)$. Dann gilt:

a) $\lambda \in \sigma_P(F)$;

b) *es existiert $l \in \mathbb{N}$, so dass* $M_\lambda(F) := \bigcup_{j\geqslant 1} \mathit{Kern}\left[(\lambda \operatorname{Id} - F)^j\right] = \mathit{Kern}\left[(\lambda \operatorname{Id} - F)^l\right]$
und $R_\lambda(F) := \mathit{Bild}\left((\lambda \operatorname{Id} - F)^l\right) \subseteq X$ *abgeschlossen;*

c) $M_\lambda(F) \subseteq dom(F)$ *und* $F M_\lambda(F) \subseteq M_\lambda(F)$ *und* $\sigma(F|_{M_\lambda(F)}) = \{\lambda\}$;

d) $F(R_\lambda(F) \cap dom(F)) \subseteq R_\lambda(F)$ *und* $\sigma(F|_{R_\lambda(F)\cap dom(F)}) = \sigma(F) \setminus \{\lambda\}$;

e) $X = M_\lambda(F) \oplus R_\lambda(F)$.

Beweis: Siehe Korollar A.2.2 in [HMN91]. □

Anhang D

Notationen

Definitionen, die in der Arbeit vorkommen, werden mit der Seitenzahl angegeben.

Mengen und Räume

$k, i \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	
$\mathbb{R}_-$	$(-\infty, 0]$	
$\mathbb{R}_+$	$[0, \infty)$	
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$	
$\mathbb{C}_a$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a\}$ für $a \in \mathbb{R}$	
$\overline{\mathbb{C}}_a$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant a\}$ für $a \in \mathbb{R}$	
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \dots\}$	
$\mathbb{R}^k$	k-dimensionale Vektoren mit reellen Einträgen mit euklidischer Norm $\lvert\cdot\rvert$	
$\mathbb{C}^k$	k-dimensionale Vektoren mit komplexen Einträgen mit euklidischer Norm $\lvert\cdot\rvert$	
$\mathbb{C}^{k^*}$	k-dimensionale Zeilenvektoren mit komplexen Einträgen mit euklidischer Norm $\lvert\cdot\rvert$	
$\mathbb{R}^{k \times i}$	$(k \times i)$-dimensionale Matrizen mit reellen Einträgen mit euklidischer Norm $\lvert\cdot\rvert$	
$\mathbb{C}^{k \times i}$	$(k \times i)$-dimensionale Matrizen mit komplexen Einträgen mit euklidischer Norm $\lvert\cdot\rvert$	
$M_k(R)$	$(k \times k)$-dimensionale Matrizen mit Einträgen aus einem Ring R	73
$\mathbb{F}[\lambda]$	Ring der Polynome über dem Körper $\mathbb{F}$ in einer Unbestimmten	77

Maßräume

$I \subseteq \mathbb{R}$

$M(I,\mathbb{K})$	$\{\nu\,;\,\nu\ \mathbb{K}\text{-wertiges Maß mit Träger in } I\}$ mit $\lVert\cdot\rVert_{TV}$	143
$M^{+}(I,\mathbb{R})$	$\{\nu\,;\,\nu\ \mathbb{R}\text{-wertiges, positives Maß mit Träger in } I\}$ mit $\lVert\cdot\rVert_{TV}$	143
$M(I,\mathbb{K}^{d\times d})$	$\{\nu=\{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^{d}\,;\,\nu_{i,j}\in M(I,\mathbb{K})$ für $i,j=1,\dots,d\}$ mit $\lVert\cdot\rVert_{TV}$	143
$M_{loc}(\mathbb{R}_-,\mathbb{K})$	$\{\nu\,;\,\nu\in M(K,\mathbb{K})$ für jedes kompakte $K\subseteq\mathbb{R}_-\}$	143
$M_{loc}(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^{d\times d})$	$\{\nu=\{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^{d}\,;\,\nu_{i,j}\in M_{loc}(\mathbb{R}_-,\mathbb{K})$ für $i,j=1,\dots,d\}$	143
$M^{\alpha}(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^{d\times d})$	$\{\nu\in M(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^{d\times d})\ :\ \int_{\mathbb{R}_-}\lvert u\rvert^{\alpha}\ \lvert\nu\rvert(du)<\infty\}$	43

Funktionenräume

$I \subseteq \mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ oder $n=k\times i$ für $k,i\in\mathbb{N}$

$B(I,\mathbb{K}^n)$	$\{f:I\to\mathbb{K}^n$ beschränkt$\}$ mit $\lVert f\rVert_B:=\lVert f\rVert_{B(I)}:=\sup_{s\in I}\lvert f(s)\rvert$	
$C(I,\mathbb{K}^n)$	$\{f:I\to\mathbb{K}^n$ stetig$\}$ mit $\lVert f\rVert_C:=\lVert f\rVert_{C(I)}:=\sup_{s\in I}\lvert f(s)\rvert$ falls $I\subseteq\mathbb{R}$ kompakt	
$C_b(I,\mathbb{K}^n)$	$\{f\in C(I,\mathbb{K}^n)$ beschränkt$\}$ mit $\lVert f\rVert_{C_b}:=\lVert f\rVert_{C_b(I)}:=\sup_{s\in I}\lvert f(s)\rvert$	
$C_c(I,\mathbb{K}^n)$	$\{f\in C(I,\mathbb{K}^n)$ mit kompaktem Träger in $I\}$, $\lVert f\rVert_{C_c}:=\lVert f\rVert_{C_c(I)}:=\sup_{s\in I}\lvert f(s)\rvert$	
$C_g^0(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^n)$	$\{f\in C(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^n)\ :\ \lim_{s\to-\infty}\lvert f(s)\rvert\,(g(s))^{-1}=0\}$ mit $\lVert f\rVert_{C_g^0}:=\sup_{s\leqslant 0}\lvert f(s)\rvert\,(g(s))^{-1}$	17
$C_\gamma(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^n)$	$\{f\in C(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^n)\ :\ \lim_{s\to-\infty}\lvert f(s)\rvert\,e^{-\gamma s}$ existiert$\}$ mit $\lVert f\rVert_{C_\gamma}:=\sup_{s\leqslant 0}\lvert f(s)\rvert\,e^{-\gamma s}$	17
$C[\rho,0]\times L_g^p$	$\{f:\mathbb{R}_-\to\mathbb{K}^n\ :\ f\in C([\rho,0],\mathbb{K}^n)$ und $\int_{-\infty}^{\rho}\lvert f(s)\rvert^p\,g(s)\,ds<\infty\}$ mit $\lVert f\rVert_{C\times L_g^p}:=\sup_{s\in[\rho,0]}\lvert f(s)\rvert+\left(\int_{-\infty}^{\rho}\lvert f(s)\rvert^p\,g(s)\,ds\right)^{1/p}$	18
$L_\nu^p(I,\mathbb{K}^n)$	$\{f:I\to\mathbb{K}^n\ :\ \int_I\lvert f(s)\rvert^p\ \lvert\nu\rvert(ds)<\infty\}$ mit $\lVert f\rVert_{L_\nu^p}:=\left(\int_I\lvert f(s)\rvert^p\ \lvert\nu\rvert(ds)\right)^{1/p}$	144
$L^p(I,\mathbb{K}^n)$	$\{f:I\to\mathbb{K}^n\ :\ \int_I\lvert f(s)\rvert^p\ ds<\infty\}$ mit $\lVert f\rVert_{L^p}:=\left(\int_I\lvert f(s)\rvert^p\ ds\right)^{1/p}$	144
$BV(I,\mathbb{K}^n)$	$\{f:I\to\mathbb{K}^n$ von beschränkter Variation auf $I\}$ mit $\lVert f\rVert_{BV(I)}:=\lvert f(a)\rvert+\mathrm{TV}\,[f,I]$	53
$F_{loc}(\mathbb{R}_-,\mathbb{K}^n)$	$\{f:\mathbb{R}_-\to\mathbb{K}^n\ :\ f\rvert_K\in F$ für alle kompakten Mengen $K\subseteq\mathbb{R}_-\}$ F Funktionenraum	

Operatoren

X, Y lineare Räume mit Semi-Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$

$\mathcal{L}(X,Y)$	$\{T : X \to Y$ linear und stetig$\}$ mit $\|T\|_{X\to Y} := \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y$	140
$\sigma(F)$	Spektrum von F	146
$\sigma_P(F)$	Punktspektrum von F	146
$\sigma_e(F)$	essentielles Spektrum von F	146
Id	identische Abbildung auf X	
I_d, I	(d-dimensionale) Einheitsmatrix	
C^T	transponierte Matrix einer Matrix C	

Spezielle Bezeichnungen

$\mathcal{B}$	Phasenraum	16
$T(t)$, $\hat{\mathrm{T}}(t)$	Lösungsoperatoren der homogenen Gleichung (2.1.1)	22
$\hat{\mathrm{A}}$	infinitesimaler Erzeuger von $\{\hat{\mathrm{T}}(t)\}_{t\geqslant 0}$	22
$\beta_{\mathcal{B}}$, β	Parameter eines Phasenraumes $\mathcal{B}$	23
r	Differential-Resolvente	34
Δ_L	charakteristische Matrix von $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{K}^d)$	26
Δ_ν	charakteristische Matrix von $\nu \in M_{loc}(\mathbb{R}_-, \mathbb{K}^{d\times d})$	37
$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$, $\stackrel{\mathcal{D}}{\to}$	Gleichheit, Konvergenz in Verteilung	
$N(0,C)$	zentrierte Normal-Verteilung mit Kovarianzmatrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$	
σ_I	Borel-σ-Algebra über $I \subseteq \mathbb{R}$	

Andere Symbole

δ_a	Dirac-Maß in $a \in \mathbb{R}$
$o(f)$	$g = o(f) \iff \left\|g(t)(f(t))^{-1}\right\| \to 0$ für $t \to \infty$
$\mathcal{O}(f)$	$g = \mathcal{O}(f) \iff \exists C > 0$ mit $\left\|g(t)(f(t))^{-1}\right\| \leqslant C$ für alle $t \geqslant 0$
$f \vee g$	$\max\{f, g\}$
$f \wedge g$	$\min\{f, g\}$

Literaturverzeichnis

[App00] Appleby, J.: Exponential asymptotic stability for linear Volterra equations / Mathematical Science, Dublin City University. 2000 (MS-00-14). – Preprint

[AR02] Appleby, J. ; Reynolds, D. W.: Decay rates of solutions of linear stochastic Volterra equations / Mathematical Science, Dublin City University. 2002 (MS-01-14). – Preprint

[Bak02] Bakhtin, Y.: Existence and uniqueness of stationary solutions of nonlinear stochastic differential equations with memory. *Probability Abstract Service math.washington.edu* 67 (2002), S. 315–338

[Bau92] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie*. 2. Aufl. Berlin : Walter de Gruyter, 1992

[BM80] Berger, M. A. ; Mizel, V. J.: Volterra equations with Ito integrals - I. *J. Integral Equations* 2 (1980), S. 187–245

[BM83] Burton, T. A. ; Mahfoud, W. E.: Stability criteria for Volterra equations. *Trans. Am. Math. Soc.* 279 (1983), S. 143–174

[BN00] Brzeźniak, Z. ; van Neerven, J.: Stochastic convolution in separable Banach spaces and the stochastic linear Cauchy problem. *Stud. Math.* 143 (2000), Nr. 1, S. 43–74

[Bro61] Browder, F. E.: On the spectral theory of elliptic differential operators. I. *Math. Ann.* 142 (1961), S. 22–130

[Bur83] Burton, T. A.: *Volterra integral and differential equations*. New York : Academic Press, 1983

[CL80] Corduneanu, C. ; Lakshmikantham, V.: Equations with unbounded delay: A survey. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 4 (1980), S. 831–877

[CM66] Coleman, B. D. ; Mizel, V. J.: Norms and semi-groups in the theory of fading memory. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 23 (1966), S. 87–123

[CM68] Coleman, B. D. ; Mizel, V. J.: On the general theory of fading memory. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 29 (1968), S. 18–31

[Cus77] Cushing, J. M.: *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics.* Berlin : Springer, 1977

[DGVLW95] Diekmann, O. ; van Gils, S. A. ; Verduyn Lunel, S. M. ; Walther, H.-O.: *Delay equations. Functional-, complex-, and nonlinear analysis.* New York : Springer, 1995

[Die87] Dietz, H.: Explicit solutions for a class of linear functional stochastic differential equations / Humboldt Universität zu Berlin. 1987 (150). – Preprint

[DPZ92] Da Prato, G. ; Zabczyk, J.: *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge : Cambridge University Press, 1992

[Edw65] Edwards, R. E.: *Functional analysis. Theory and applications.* New York : Holt Rinehart and Winston, 1965

[Els99] Elsanousi, S. A.: Lyapunov exponents of linear stochastic functional differential equations with infinite memory. *Stochastics Stochastics Rep.* 65 (1999), S. 153–176

[EN00] Engel, K.-J. ; Nagel, R.: *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Berlin : Springer, 2000

[Far73] Fargue, D.: Réductibilité des systémes héreditaires à des systémes dynamiques. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série B* (1973), S. 471–473

[GK00] Gushchin, A. A. ; Küchler, U.: On stationary solutions of delay differential equations driven by a Lévy process. *Stochastic Proc. Appl.* 88 (2000), S. 195–211

[GLS90] Gripenberg, G. ; Londen, S.-O. ; Staffans, O.: *Volterra integral and functional equations.* Cambrigde : Cambridge University Press, 1990

[GM73] Grossman, S. I. ; Miller, R. K.: Nonlinear Volterra integrodifferential systems with L^1-kernels. *J. Differ. Equations* 13 (1973), S. 551–566

[GS71] Gichman, I. I. ; Skorochod, A. W.: *Stochastische Differentialgleichungen.* Berlin : Akademie-Verlag, 1971

[Had85] Haddock, J. R.: Friendly spaces for functional differential equations with infinite delay. In: *Trends in the theory and practice of non-linear analysis, Proc. 6th Int. Conf., Arlington/Tex. 1984.* Amsterdam : North-Holland, 1985, S. 173–182

[Hal69] Hale, J. K.: Dynamical systems and stability. *J. Math. Anal. Appl.* 26 (1969), S. 39–59

[HDRM00] Haurie, C. ; Dale, D. C. ; Rudnicki, R. ; Mackey, M. C.: Modeling complex neutrophil dynamics in the grey collie. *J. theor. Biol.* 204 (2000), S. 505–519

[HHM98] Hearn, T. ; Haurie, C. ; Mackey, M. C.: Cyclic Neutropenia and their peripheral control of white blood cell production. *J. theor. Biol.* 192 (1998), S. 167–181

[HK78] Hale, J. K. ; Kato, J.: Phase space for retarded equations with infinite delay. *Funkc. Ekvacioj, Ser. Int.* 21 (1978), S. 11–41

[HMN91] Hino, Y. ; Murakami, S. ; Naito, T.: *Functional differential equations with infinite delay.* Berlin : Springer, 1991

[HP74] Hille, E. ; Phillips, R. S.: *Functional analysis and semi-groups.* 3rd printing of rev. ed. of 1957. Providence : American Mathematical Society, 1974

[HVL93] Hale, J. K. ; Verduyn Lunel, S. M.: *Introduction to functional differential equations.* New York : Springer, 1993

[IN64] Itô, K. ; Nisio, M.: On stationary solutions of a stochastic differential equation. *J. Math. Kyoto Univ.* 4 (1964), S. 1–75

[Jac91] Jacobsen, M.: Homogeneous Gaussian diffusions in finite dimensions / Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen. 1991 (3). – Preprint

[Jor79] Jordan, G. S.: Asymptotic stability of a class of integrodifferential systems. *J. Differ. Equations* 31 (1979), S. 359–365

[Kal02] Kallenberg, O.: *Foundations of modern probability.* 2nd ed. New York : Springer, 2002

[Kat90] Kato, J.: Phase space for functional differential equations. In: *Qualitative theory of differential equations, 3rd Colloq., Szeged/Hung. 1988.* Amsterdam : North-Holland, 1990, S. 307–325

[Kat95] Kato, J.: Stability property and phase space. *Rocky Mt. J. Math.* 25 (1995), S. 315–338

[KM92] Küchler, U. ; Mensch, B.: Langevin's stochastic differential equation extended by a time-delayed term. *Stochastics Stochastics Rep* 40 (1992), S. 23–42

[KM99] Kolmanovskii, V. ; Myshkis, A.: *Introduction to the theory and applications of functional differential equations.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999

[KS80] Kappel, F. ; Schappacher, W.: Some considerations to the fundamental theory of infinite delay equations. *J. Differ. Equations* 37 (1980), S. 141–183

[KS91] Karatzas, I. ; Shreve, S. E.: *Brownian motion and stochastic calculus.* 2nd ed. New York : Springer, 1991

[Kur99] Kurbatov, V. G.: *Functional differential operators and equations.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999

[Lor92] Lorenz, F.: *Lineare Algebra II.* 3. Aufl. Mannheim : B. I. Wissenschaftsverlag, 1992

[LWZ94] Lakshmikantham, V. ; Wen, L. ; Zhang, B.: *Theory of differential equations with unbounded delay.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1994

[Mac78] MacDonald, N.: *Time lags in biological models.* Berlin : Springer, 1978

[Mao97] Mao, X.: *Stochastic differential equations and their applications.* Chichester : Horwood Publishing, 1997

[Mil71] Miller, R. K.: Asymptotic stability properties of linear Volterra integrodifferential equations. *J. Differ. Equations* 10 (1971), S. 485–506

[Moh84] Mohammed, S.-E. A.: *Stochastic functional differential equations.* Boston : Pitman, 1984

[MS90] Mohammed, S.-E. A. ; Scheutzow, M. K. R.: Lyapunov exponents and stationary solutions for affine stochastic delay equations. *Stochastics Stochastics Rep.* 29 (1990), S. 259–283

[MSW86] Mohammed, S.-E. A. ; Scheutzow, M. K. R. ; Weizsäcker, H. v.: Hyperbolic state space decomposition for a linear stochastic delay equation. *SIAM J. Control Optimization* 24 (1986), S. 543–551

[MT84] Mizel, V. J. ; Trutzer, V.: Stochastic hereditary equations: Existence and asymptotic stability. *J. Integral Equations* 7 (1984), S. 1–72

[Mur91] Murakami, S.: Exponential asymptotic stability for scalar linear Volterra equations. *Differ. Integral Equ.* 4 (1991), S. 519–525

[Nai79] Naito, T.: On linear autonomous retarded equations with an abstract phase space for infinite delay. *J. Differ. Equations* 33 (1979), S. 74–91

[Put01] Putschke, M. U.: *Affine stochastische Funktionaldifferentialgleichungen*. Berlin, Humboldt-Universität zu Berlin., Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II, Diss., 2001

[Rie01] Riedle, M.: Stochastic differential equations with infinite delay / Sonderforschungsbereich 373, Humboldt Universität zu Berlin. 2001 (99). – Discussion paper

[Rud73] Rudin, W.: *Functional analysis*. New York : McGraw-Hill, 1973

[Rud87] Rudin, W.: *Real and complex analysis*. 3rd ed. New York : McGraw-Hill, 1987

[Sch83] Scheutzow, M. K. R.: *Qualitatives Verhalten der Lösungen von eindimensionalen nichtlinearen stochstischen Differentialgleichungen mit Gedächtnis*. Kaiserslautern, Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern, Diss., 1983

[Sei82] Seifert, G.: On Caratheodory conditions for functional differential equations with infinite delays. *Rocky Mt. J. Math.* 12 (1982), S. 615–619

[SW75] Shea, D. F. ; Wainger, S.: Variants of the Wiener-Levy theorem, with applications to stability problems for some Volterra integral equations. *Am. J. Math.* 97 (1975), S. 312–343

[Tud87] Tudor, C.: On stochastic functional-differential equations with unbounded delay. *SIAM J. Math. Anal.* 18 (1987), S. 1716–1725

[WL02] Weinan, E. ; Liu, D.: Gibbsian dynamics and invariant measures for stochastic dissipative PDEs. *J. of Stat. Phys.* 108 (2002), S. 1125–1156

[WMS01] Weinan, E. ; Mattingly, J. C. ; Sinai, Y.: Gibbsian dynamics and ergodicity for the stochastically forced Navier-Stokes equation. *Commun. Math. Phys.* 224 (2001), S. 83–106

Lebenslauf

Name:	Markus Riedle
Geburtsdatum:	29.04.1971
Geburtsort:	Konstanz
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	ledig

04.1993 – 09.1996	Studium an der Philipps-Universität Marburg, Mathematik mit Nebenfach Informatik
09.1996 – 04.1997	Studium am Queen Mary and Westfield College, London, Mathematikstudium als “associate student”
05.1997 – 02.2000	Philipps-Universität Marburg, Fortführung des Studiums, Abschluss: Diplom-Mathematiker Diplomarbeit zum Thema: “Zur Schätzung von Varianzen in der Changepoint–Analyse”
04.2000 – heute	Promotionsstipendiat des Berliner Graduiertenkollegs “Stochastische Prozesse und probabilistische Analysis”

Markus Riedle
20. Dezember 2002

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig ohne fremde Hilfe verfaßt und nur die angegebene Literatur und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Markus Riedle
20. Dezember 2002